

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
**Departamento de Física Teórica I**



**TESIS DOCTORAL**

**Efectos de la temperatura y análisis del límite clásico en  
teoría cuántica de campos**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Fernando Ruiz Ruiz**

DIRECTOR:

**Ramón Fernández Álvarez-Estrada**

**Madrid, 2015**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica I

TF  
1988  
021



x-53-098094-x

**EFFECTOS DE TEMPERATURA Y ANALISIS DEL  
LIMITE CLASICO EN  
TEORIA CUANTICA DE CAMPOS**



Fernando Ruiz Ruiz

Madrid, 1988

**Colección Tesis Doctorales. N.º 21/88**

**© Fernando Ruiz Ruiz**

**Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3. 28015 Madrid  
Madrid, 1988  
Ricoh 3700  
Depósito Legal: M-1617-1988**





EFFECTOS DE TEMPERATURA Y ANALISIS DEL LIMITE  
CLASICO EN TEORIA CUANTICA DE CAMPOS

Memoria que presenta  
Fernando Jesús Ruiz Ruiz  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas  
Director: Prof. Ramón Fernández Alvarez-Estrada  
Universidad Complutense , Madrid, julio de 1986



#### AGRADECIMIENTOS

El trabajo que se recoge en esta memoria ha sido realizado en el Departamento de Física Teórica de la Universidad Complutense de Madrid bajo la dirección del Prof. Ramón Fernández Alvarez-Estrada. A él le expreso mi agradecimiento por su dirección y por su constante estímulo y apoyo.

También quiero dar las gracias a los demás miembros del departamento por sus comentarios y sugerencias, y de una forma especial a los Profs. A. Muñoz, M. Ramón y al Dr. L. A. Fernández.

A la Srta. M. A. Iglesias le agradezco su colaboración en el mecanografiado de esta memoria.





## INDICE

	<u>Página</u>
Introducción .....	1
Parte I: Electrodinámica Cuántica no Relativista .....	7
Capítulo 1: Mecánica Estadística Clásica de la Electro- dinámica no Relativista .....	8
1.1. Introducción .....	8
1.2. Función de partición .....	8
1.3. Valores esperados de los campos $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ y de la energía .....	12
Capítulo 2: Mecánica Estadística Cuántica de la Elec- trodinámica no Relativista .....	16
2.1. Introducción .....	16
2.2. Función de partición .....	16
2.3. Valores esperados de los campos $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ y de la energía .....	22
Capítulo 3: Límite clásico de la Mecánica Estadística Cuántica de la Electrodinámica no Relati- vista .....	25
3.1. Introducción .....	25
3.2. Límite clásico y primera corrección cuánti- ca a la función de partición .....	25
3.3. Límite clásico de los valores esperados (cuánticos) de $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ y $H$ .....	30
3.4. Análisis comparativo con otros métodos y trabajos .....	31
3.5. El caso escalar .....	36

	<u>Página</u>
Parte II: Cuantificación de una teoría de campos a temperatura finita .....	41
Capítulo 4: Cuantificación por métodos funcionales de una teoría de campos a temperatura finita .....	42
4.1. Introducción .....	42
4.2. Función de partición covariante .....	43
4.3. Reglas de Feynman a la Bernard (I): teorías no gauge .....	45
4.4. Reglas de Feynman a la Bernard (II): teorías gauge .....	52
4.5. Propagadores de Dolan y Jackiw .....	56
4.6. "Thermo-Field Dynamics" (TFD) .....	60
Capítulo 5: Cuantificación canónica de una teoría de campos a temperatura finita .....	72
5.1. Introducción .....	72
5.2. TFD (I): teorías sin invariancia gauge .	72
5.3. TFD (II): teorías gauge .....	85
5.4. TFD versus Bernard .....	94
5.5. Controversia Ott-Planck .....	95
Parte III: Renormalización a un loop de QED a temperatura finita .....	97
Capítulo 6: Renormalizabilidad e identidades de Ward-Takahashi .....	98
6.1. Introducción .....	98
6.2. Renormalizabilidad de la teoría .....	98
6.3. Identidades de Ward-Takahashi .....	101

	<u>Página</u>
Capítulo 7: Masa efectiva del electrón a temperatura finita .....	106
7.1. Introducción .....	106
7.2. Autoenergía del fermión .....	106
7.3. El propagador fermiónico .....	117
7.4. Masa efectiva del electrón a temperatura finita .....	119
7.5. Desarrollo a altas y bajas temperaturas ..	124
7.6. Momento magnético del electrón a temperatura finita (I) .....	129
Capítulo 8: Masa del fotón a temperatura finita .....	135
8.1. Introducción .....	135
8.2. Tensor de polarización del fluido .....	135
8.3. El propagador del fotón .....	142
8.4. Masas eléctrica y magnética del fotón a temperatura finita .....	144
Capítulo 9: Momento magnético del electrón a temperatura finita .....	150
9.1. Introducción .....	150
9.2. Renormalización del vértice .....	150
9.3. Invariancia gauge de la corriente fermiónica .....	154
9.4. Momento magnético del electrón a temperatura finita (y II) .....	159
Parte IV: Los modelos de Schwinger y de Thirring a temperatura finita .....	165
Capítulo 10: El modelo de Schwinger a temperatura finita .....	166
10.1. Introducción .....	166
10.2. La funcional generadora del modelo .....	166

	<u>Página</u>
10.3. La funcional de loops fermiónicos .....	171
10.4. Los propagadores completos del campo EM y del fermión .....	177
Capítulo 11: El modelo de Thirring a temperatura fin- ta .....	183
11.1. Introducción .....	183
11.2. La funcional generadora para el modelo ..	183
11.3. El propagador fermiónico completo .....	189
Conclusiones .....	194
Apéndice A .....	197
Apéndice B .....	199
Apéndice C .....	214
Apéndice D .....	216
Apéndice E .....	219
Apéndice F .....	224
Referencias .....	229

## INTRODUCCION

La Teoría Cuántica de Campos a temperatura finita (distinta de cero) está adquiriendo un papel muy importante en la Física Teórica durante los últimos años. Son muchas las áreas de la Física en las que es necesario un formalismo cuántico de campos a temperatura finita. Piénsese, por ejemplo, en los plasmas, en los sólidos, en la materia condensada, o en los problemas cosmológicos.

En la presente memoria se estudian algunos aspectos de teorías y modelos cuánticos de campos a temperatura finita. Para encuadrar adecuadamente nuestro trabajo dentro de la literatura que sobre el tema existe vamos a hacer un pequeño resumen de la situación actual.

Veamos en primer lugar las diferencias entre un sistema descrito por una teoría cuántica de campos a temperatura nula y un sistema descrito por la misma teoría a temperatura finita. Cuando la temperatura es cero, si no se introducen partículas desde el exterior, el estado en que se encuentra el sistema es el vacío. Por el contrario, a temperatura finita, el sistema está formado por un gran número de partículas, que forman una colectividad estadística. Por ejemplo, en el caso de partículas libres, y en el referencial en que el sistema se encuentra en reposo, éste estaría descrito por las distribuciones de Fermi-Dirac o Bose-Einstein, según se tratase de fermiones o bosones. Este sistema estadístico puede ser considerado como un fluido perfecto, que por encontrarse en equilibrio termodinámico, está caracterizado por un parámetro invariante Lorentz relacionado con la temperatura y un cuadri-vector  $u^\nu$  tal que  $u^2 = 1$ , de acuerdo con [1].

En 1974, Bernard [2] obtuvo, utilizando las ideas de Matsubara [3], las reglas de Feynman para una teoría cuántica de campos a temperatura finita. Para ello consideró la función de partición

del sistema en cuestión en el inercial en que dicho sistema se encuentra en reposo,

$$Z = \text{tr}[\exp(-H/k_B T)] ,$$

donde  $H$  es el hamiltoniano,  $k_B$  es la constante de Boltzman y  $T$  es la temperatura. Expresando  $Z$  como una integral funcional y usando métodos funcionales obtuvo las reglas de Feynman. Las características principales de éstas son: i/ las energías sólo pueden tomar valores discretos ( $2\pi n/\beta$  para los bosones y  $(2n+1)\pi/\beta$  para los fermiones), ii/ son a tiempo imaginario, y iii/ no son covariantes. En el mismo año, Dolan y Jackiw [4] utilizaron estas reglas para calcular el potencial efectivo en  $\lambda\phi^4$  a dos "loops". Posteriormente, Kislinger y Morley [5] las usaron en el estudio del potencial termodinámico de la Electrodinámica Cuántica (QED) y su renormalización, y Gross, Pisarski y Yaffe [6] en el de la Cromodinámica Cuántica (QCD).

Dolan y Jackiw [4] propusieron en el mismo 1974 unas reglas de Feynman, alternativas a las de Bernard, a tiempo real y en las que la energía podía tomar valores arbitrarios. Para ello prolongaron analíticamente los propagadores de Bernard usando el método de Fetter y Walecka [7]. Estas reglas tampoco son covariantes. Sin embargo, esta dificultad se soluciona fácilmente: basta elegir como eje de tiempos el que determina el cuadrivector  $u^\nu$  que caracteriza al fluido térmico. El principal inconveniente de las reglas de Feynman a la Dolan-Jackiw es, como ellos mismos señalaron, que en los cálculos perturbativos aparecen singularidades del tipo  $\delta^N(k^2 - m^2)$ , donde el exponente  $N$  es  $N \geq 2$ . Esta situación se da, por ejemplo, cuando se calcula el potencial efectivo a dos "loops" en  $\lambda\phi^4$ . La versión no covariante de estas reglas de Feynman ha sido utilizada, entre otros, por Peressutti y Skagerstam [8], y Donoghue, Holstein y Robinett [9] para evaluar las correcciones térmicas de orden  $e^2$  a la masa del electrón en QED; y por Tarrach [10] para calcular a orden  $e^2$  y a temperaturas bajas las longitu-

des de correlación eléctrica y magnética del campo electromagnético (EM) en QED. Weldon [11] ha usado la versión covariante para estudiar el límite de altas temperaturas de un plasma electrodinámico con fermiones de masa nula.

Takahashi y Umezawa [12] propusieron en 1975 un tercer formalismo para estudiar una teoría cuántica de campos a temperatura finita, al cual denominaron "Thermo-Field Dynamics" (TFD). Las reglas de Feynman a las que da lugar la TFD son a tiempo real, las energías pueden tomar valores arbitrarios, y no dan lugar a singularidades del tipo  $\delta^N(k^2 - m^2)$  ( $N \geq 2$ ). A cambio, cada propagador adquiere una estructura matricial  $2 \times 2$ . La componente 11 de esta matriz coincide con el propagador de Dolan y Jackiw. Son precisamente las demás componentes las que cancelan las divergencias  $\delta^N(k^2 - m^2)$  ( $N \geq 2$ ). La idea fundamental de la TFD es construir un estado  $|0(\beta)\rangle$ , al que se llama vacío térmico, con la propiedad de que el valor medio de un observable en el fluido térmico es igual al valor esperado del mismo observable en  $|0(\beta)\rangle$ . Para construir  $|0(\beta)\rangle$ , a cada grado de libertad físico se le asocia un grado de libertad ficticio. De aquí que los propagadores adquieran esa estructura matricial  $2 \times 2$ . La TFD también tiene una interpretación funcional a partir de la función de partición. Sus reglas de Feynman se hacen covariantes eligiendo como eje de tiempos el determinado por el cuadrivector  $u^\nu$  que caracteriza al fluido térmico. Ojima [13] ha adaptado la TFD a teorías con invariancia gauge. Las aplicaciones de la TFD son muchas; citemos algunas. Umezawa, Matsumoto y Tachiki han recopilado en [14] un buen número de ellas: cristales, metales normales, superconductores magnéticos, etc. Nijmí y Semenoff [15] han calculado el potencial efectivo a dos "loops" en  $\lambda\phi^4$  y han obtenido el mismo resultado que por el método de Bernard. Matsumoto, Ojima y Umezawa [16] han estudiado la renormalización a dos "loops" de  $\lambda\phi^4$ .

Mencionemos ahora algunos de los problemas que permanecen abiertos. Primero: ciertos aspectos de un estudio no relativista que ahonden en la conexión que hay entre la Física Estadística



Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos a temperatura finita. Segundo: la aplicación de la TFD (esquema libre de divergencias del tipo  $\delta^N(k^2 - m^2)$ ,  $N \geq 2$ ) a teorías físicamente relevantes, como pueda ser la QED. En este mismo sentido, la utilización de la TFD para evaluar las correcciones de temperatura a parámetros físicos, (la masa y el momento magnético del electrón entre otros), y su comparación con los resultados obtenidos por el método de Dolan-Jackiw. Tercero: la covariancia explícita de los cálculos. Cuarto: el estudio de modelos simples de los que se conoce su solución exacta a temperatura cero. Quinto: las transiciones de fase. Y otros muchos más, como por ejemplo, el cálculo de algunas magnitudes termodinámicas, los problemas fuera del equilibrio, etc.

En la presente memoria abordamos algunas de las cuestiones que acabamos de mencionar. El esquema de la misma es el siguiente.

En la primera parte, estudiamos cuánticamente un sistema en equilibrio termodinámico formado por un gran número ( $N$ ) de partículas idénticas cargadas no relativistas en interacción con el campo EM dinámico. Cuando las partículas de este sistema son fermiones lo que tenemos es la QED no relativista a temperatura finita. Para estudiar este sistema de muchas partículas utilizamos métodos de Física Estadística, según la cual toda la información del sistema esta contenida en la función de partición  $Z$ . En el primer capítulo evaluamos  $Z$  para el caso clásico (partículas y campo EM clásicos), y a partir de ella calculamos los valores medios de los campos EM, magnético  $\vec{B}$  y eléctrico  $\vec{E}$ , así como el de la energía. En el capítulo 2 llevamos a cabo el mismo análisis que en el 1, pero en el caso cuántico (partículas y campo EM cuánticos). En dicho análisis juegan un papel muy importante las integrales de camino a la Feynman, ya que la función de partición cuántica viene dada por una traza, y cada uno de los elementos de matriz que entran en ella se expresa como una integral de camino. En el apéndice A se muestra que el propagador entre dos estados del sistema está acotado por el producto de dos propagadores: el del campo EM

libre y el de  $N$  partículas interaccionando mediante potenciales de Coulomb. En el tercer capítulo se estudia el límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$  del caso cuántico del capítulo 2, recuperando los resultados del capítulo 1. También evaluamos las primeras correcciones cuánticas a la función de partición clásica y analizamos las divergencias ultravioletas que presentan algunas de estas correcciones, relacionándolas con las que tienen lugar en QED.

En la segunda parte exponemos brevemente los distintos métodos existentes para cuantificar una teoría de campos a temperatura finita y las reglas de Feynman a las que dan lugar. En el capítulo 4 caracterizamos el sistema descrito por una tal teoría como un fluido perfecto en equilibrio termodinámico. También damos un resumen de los métodos funcionales de cuantificación de una teoría de campos a temperatura finita: el formalismo de Bernard y la interpretación funcional de la TFD. En el capítulo 5 recordamos la interpretación canónica de la TFD. La cuantificación de Bernard no puede ser interpretada canónicamente puesto que se basa única y exclusivamente en métodos funcionales, sin hacer referencia a operadores creación y destrucción. De hecho, la discretización de las energías en el formalismo de Bernard es una consecuencia de las condiciones de contorno impuestas por la traza que define la función de partición. Nosotros usaremos la TFD y sus reglas de Feynman covariantes.

En la tercera parte abordamos el problema de la renormalización ultravioleta de la QED. En el capítulo 6 demostramos que la teoría es renormalizable. Para ello usamos un método análogo al que para el caso  $\lambda\phi^4$  han utilizado Matsumoto, Ojima y Umezawa [16]. La renormalizabilidad de la teoría se sigue de dos hechos: las divergencias ultravioletas son las mismas que a temperatura cero, y son independientes de la temperatura, (es decir, no van multiplicadas por factores dependientes de la temperatura). Así pues, para renormalizar la teoría se pueden utilizar los mismos contratérminos que a temperatura nula. Este es el criterio adoptado en esta tercera parte. También en el capítulo 6 encontramos las identida-

des de Ward-Takahashi (WT). En el capítulo 7 estudiamos la auto-energía del fermión y justificamos, usando argumentos de covariancia, la conveniencia de usar los mismos contratérminos que a temperatura cero. En el capítulo 8 analizamos el tensor de polarización del fluido térmico. Y en el 9 la primera corrección perturbativa al vértice y a la corriente fermiónica.

Por último, en la cuarta parte resolvemos de forma exacta los modelos de Schwinger, capítulo 10, y de Thirring, capítulo 11, a temperatura finita. Para ello usamos métodos funcionales.

-7-

## PARTE I

ELECTRODINAMICA CUANTICA NO RELATIVISTA

## CAPITULO 1

### MECANICA ESTADISTICA CLASICA DE LA ELECTRODINAMICA NO RELATIVISTA

#### 1.1 INTRODUCCION

Como ya hemos dicho, en esta primera parte de la memoria vamos a estudiar la Electrodinámica Cuántica no relativista. Antes de pasar al análisis propiamente cuántico vamos a dar brevemente algunos resultados clásicos. Así pues, se trata de estudiar clásicamente un sistema en equilibrio termodinámico formado por un gran número de partículas idénticas cargadas en interacción con el campo electromagnético (EM) dinámico. Debido a que se trata de un sistema de muchas partículas, efectuamos un estudio estadístico del mismo. Ahora bien, de la Física Estadística, sabemos que la función que contiene toda la información de un sistema es la función de partición. En la sección 1.2 hallaremos la función de partición del sistema que nos interesa. Y en la 1.3 evaluaremos el valor medio de los campos EM, eléctrico y magnético, así como el de la energía.

#### 1.2 FUNCION DE PARTICION

Consideremos  $N$  partículas clásicas ( $C_1$ ) de carga  $q$  y masa  $m$  en interacción con el campo EM clásico  $\vec{A}_{C_1}(\vec{x}, t)$ . Supongamos un fondo homogéneo cargado, con cargas de signo contrario a las de las partículas, y sin grados de libertad dinámicos, de manera que el sistema es eléctricamente neutro. El hamiltoniano en el gauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{C_1}(\vec{x}, t) = 0$ ) está dado por [17]

$$H_{C_1} = H_{p,C_1} + H_{EM,C_1} + H_C \quad (1.1.a)$$

$$H_{p,a} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left[ \vec{p}_i - \frac{q}{c} \vec{A}_a(\vec{x}_i, t) \right]^2 \quad (1.1.b)$$

$$H_{em,a} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{A}_a}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_a)^2 \right] \quad (1.1.c)$$

$$H_c = \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi |\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (1.1.d)$$

donde  $\vec{x}_i$  y  $\vec{p}_i$  son la posición y el momento de la partícula  $i$ -ésima y la integración sobre la  $\vec{x}$  está extendida al volumen  $V$  ocupado por el sistema. Nótese que no hemos tenido en cuenta la autoenergía electrostática (coulombiana)  $U_c$  de cada una de las partículas. Su inclusión daría lugar en la función de partición a un factor global  $\exp(-\beta N U_c)$ . Cuando el volumen  $V$  tiende a infinito el campo  $\vec{A}_{c1}(\vec{x}, t)$  toma la forma

$$\vec{A}_a(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[ c(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + c.c. \right], \quad (1.2)$$

donde  $a(\vec{k}, \lambda, t)$  ( $\lambda = 1, 2$ ) son las amplitudes de campo complejas,  $c(\vec{k})$  es un factor de corte ("cut-off") ultravioleta ( $c^*(\vec{k}) = c(-\vec{k})$ ), y  $\{\vec{\epsilon}(\vec{k}, 1), \vec{\epsilon}(\vec{k}, 2), \vec{\epsilon}(\vec{k}, 3) \equiv \vec{k}/|\vec{k}|\}$  es una base de polarización lineal.

A continuación, para cada modo  $(\vec{k}, \lambda)$ , hacemos el siguiente cambio de variable [18]

$$q(\vec{k}, \lambda, t) = \frac{i}{c} [a^*(-\vec{k}, \lambda, t) - a(\vec{k}, \lambda, t)] \quad (1.3.a)$$

$$p(\vec{k}, \lambda, t) = -\frac{\omega}{c} [a^*(\vec{k}, \lambda, t) + a(-\vec{k}, \lambda, t)] , \quad (1.3.b)$$

bajo el cual (1.1.c) y (1.2) se convierten en

$$H_{EM,cl} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} |c(\vec{k})|^2 [\pi(\vec{k}, \lambda, t)^2 + \omega^2 |q(\vec{k}, \lambda, t)|^2] \quad (1.4)$$

$$\vec{A}_{cl}(\vec{x}, t) = ic \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) q(\vec{k}, \lambda, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} . \quad (1.5)$$

Obsérvese que  $q(\vec{k}, \lambda, t)$  y  $p(\vec{k}, \lambda, t)$  son la coordenada y el momento (complejos) de un oscilador de frecuencia  $\omega/2\pi$  ( $\omega = |\vec{k}|c$ ) y que satisfacen  $q^*(\vec{k}, \lambda, t) = q(-\vec{k}, \lambda, t)$  y  $p^*(\vec{k}, \lambda, t) = p(-\vec{k}, \lambda, t)$ , lo que es inmediato a partir de (1.3).

La función de partición clásica en la colectividad canónica toma la forma [19]

$$Z_{N,cl} = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int d\Gamma \exp(-\beta H) ,$$

donde  $d\Gamma$  es el elemento de volumen del espacio de las fases y  $H$  el hamiltoniano. En nuestro caso tenemos

$$Z_{N,cl} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3\vec{x}_i d^3\vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp(-\beta H_{cl}) , \quad (1.6)$$

con  $H_{C1}$  dado por (1.1), (1.4) y (1.5), y donde

$$\mathcal{D}q \mathcal{D}n = \prod_{\vec{k}, \lambda} \frac{dq(\vec{k}, \lambda) d\pi(\vec{k}, \lambda)}{2\pi\hbar} \quad (1.7)$$

Con respecto a (1.6) hay tres comentarios que hacer: i/ todas las coordenadas y momentos de los osciladores del campo EM están tomadas en un instante dado  $t = 0$  (no escrito explícitamente), ii/ (1.6) contiene una integral funcional sobre  $q(\vec{k}, \lambda)$  y  $\pi(\vec{k}, \lambda)$ , y iii/ prescindimos de la parte de la función de partición asociada al fondo homogéneo cargado. Con respecto a la integral funcional que nos aparece, indicar que la vamos a tratar como un producto de infinitas integrales, cada una de ellas sobre  $dq(\vec{k}, \lambda) d\pi(\vec{k}, \lambda)$  para cada  $(\vec{k}, \lambda)$ . Esta integral funcional aparecerá factorizada mediante un factor  $Z_{EM, C1}$ .

Haciendo en (1.6) el cambio  $\vec{p}_i - \frac{q}{c} \vec{A}_{C1}(\vec{x}_i, t) \rightarrow \vec{p}_i$  y efectuando las integrales gaussianas, primero sobre las  $\vec{p}_i$ , y luego sobre las  $q(\vec{k}, \lambda)$  y los  $\pi(\vec{k}, \lambda)$ , obtenemos

$$Z_{N, a} = \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^3} \right)^{3N/2} Z_{EM, a} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \exp \left\{ -\beta \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right\}, \quad (1.8)$$

donde  $Z_{EM, C1}$  es la función de partición clásica del campo EM:

$$Z_{EM, a} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}n \exp(-\beta H_{EM, a}) = \prod_{\vec{k}} \left( \frac{1}{\omega_{\beta\hbar}} \right)^2, \quad (1.9)$$

que contiene la integral funcional que aparecía en (1.6). La ecuación (1.8) nos dice que, en lo que respecta a la función de partición, las partículas interaccionan sólo a través del potencial de Coulomb y se desacoplan del campo EM transversal. Este hecho es



una consecuencia directa del acoplamiento mínimo (invariancia gauge). A partir de (1.9) es muy fácil obtener la ley de Rayleigh-Jeans. En efecto, tomando logaritmos y derivando con respecto a  $\beta$  obtenemos la energía por unidad de volumen

$$\frac{1}{V} \langle H_{EM,a} \rangle = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{EM,a} = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \quad (1.10)$$

Usando que  $\sum_{\lambda=1,2} d^3 k / (2\pi)^3 = 8\pi \nu^2 d\nu / c^3$ , (1.10) nos dice que la energía por unidad de volumen con frecuencia entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es está dada por  $8\pi \nu^2 d\nu / c^3 \beta$ , que es precisamente la fórmula de Rayleigh-Jeans.

### 1.3 VALORES MEDIOS DE LOS CAMPOS $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ Y DE LA ENERGIA

Vamos a calcular los valores de los campos EM  $\vec{A}$ , magnético  $\vec{B}$  y eléctrico  $\vec{E}$  producidos por el sistema en un punto  $\vec{x}$  del espacio. Estos vienen dados por los valores medios de dichos campos en la colectividad canónica. Ahora bien, el valor medio de una variable dinámica  $O(p,q)$  en una colectividad canónica está dado por [19]

$$\langle O \rangle_a = \frac{1}{Z_{N,a}} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int d\Gamma O(p,q) \exp(-\beta H). \quad (1.11)$$

A continuación vamos a usar esta fórmula para calcular  $\langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_{C1}$ ,  $\langle \vec{B}(\vec{x}) \rangle_{C1}$  y  $\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_{C1}$ .

En cuanto al valor medio del campo EM tenemos, que como  $\vec{A}_{C1}(\vec{x}, t)$  es lineal en  $q(\vec{k}, \lambda)$ , por integración simétrica en  $q(\vec{k}, \lambda)$ ,

$$\langle A(\vec{x}) \rangle_a = \frac{1}{Z_{N,a}} \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 \vec{x}_i d^3 \vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{D}q \mathcal{D}\pi \vec{A}_a(\vec{x}) \exp(-\beta H_a) = 0. \quad (1.12)$$

Análogamente, para el campo magnético  $\vec{B}_{C1} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{C1}$  obtenemos

$$\langle \vec{B}(\vec{x}) \rangle_a = 0. \quad (1.13)$$

El campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}_a(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{A}_a(\vec{x}, t)}{c \partial t} + \vec{\nabla} \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|} \quad (1.14)$$

El primer sumando no contribuye a  $\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_{C1}$  pues, en el gauge de Coulomb,  $-\partial \vec{A}_{C1}/c \partial t$  es el momento canónico del campo EM,

$$-\frac{\partial \vec{A}_a(\vec{x}, t)}{c \partial t} = i \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c^*(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \pi(\vec{k}, \lambda, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

y por integración simétrica en  $\pi(\vec{k}, \lambda)$ , obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial \vec{A}_a(\vec{x}, t)}{c \partial t} \right\rangle_a = 0.$$

Así pues, a  $\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_{C1}$  sólo contribuye el segundo término de (1.14).

Dicha contribución está dada por

$$\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_a = \vec{\nabla} \langle V(\vec{x}) \rangle_a,$$

donde

$$\langle V(\vec{x}) \rangle_a = \frac{1}{Z_{N,a}} \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 \vec{x}_i d^3 \vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{D}q \mathcal{D}\pi \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|} \exp(-\beta H_a)$$

es el valor medio del potencial eléctrico en el punto  $\vec{x}$ . Ahora bien, este potencial es constante pues efectuando el cambio de variable  $\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_1 + \vec{a}$ , con  $\vec{a}$  arbitrario, obtenemos

$$\langle V(\vec{x} + \vec{a}) \rangle_{\alpha} = \langle V(\vec{x}) \rangle_{\alpha} ,$$

y, por tanto, que

$$\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_{\alpha} = 0 . \quad (1.15)$$

Una generalización directa de los argumentos anteriores muestra que si el fondo no es homogéneo sino una distribución periódica de car gas pesadas sin grados de libertad internos, los valores medios para el potencial electrostático y el campo eléctrico son periódicos con el mismo período que el del fondo.

Vamos a calcular por último el valor medio de la energía. Para ello se puede utilizar (1.11) o bien

$$\langle H \rangle_{\alpha} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{N, \alpha} .$$

De cualquiera de las dos formas se obtiene

$$\langle H \rangle_{\alpha} = \frac{3N}{2} \frac{1}{\beta} + \langle H_c \rangle_{\alpha} + V \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} , \quad (1.16)$$

$$\langle H_c \rangle_{\alpha} = \left\{ \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \exp(-\beta H_c) \right\}^{-1} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i H_c \exp(-\beta H_c) . \quad (1.17)$$

La ecuación (1.16) nos dice que la energía de nuestro sistema es la suma de la energía de las partículas que interaccionan mediante potenciales de Coulomb (dos primeros términos), y de la del campo EM libre (tercer término), mostrándonos nuevamente el desacoplamiento entre las partículas y el campo EM transversal que aparecía en (1.8).

## CAPITULO 2

### MECANICA ESTADISTICA CUANTICA DE LA ELECTRODINAMICA NO RELATIVISTA

#### 2.1 INTRODUCCION

Una vez discutido brevemente el caso clásico pasamos al cuántico, que es el objeto de este capítulo. En la sección 2.2 calcularemos la función de partición, y en la 2.3 los valores esperados de los campos EM, magnético y eléctrico, así como de la energía. Ya en la sección 1.2 nos apareció una integral funcional sobre los grados de libertad del campo EM, pero es aquí donde se hacen impresionantes los métodos de integración funcional. La razón es que cuánticamente la función de partición viene dada por una traza, y cada uno de los elementos de matriz de la traza se evalúa por medio del formalismo de integrales de camino. Para una exposición de estos métodos se puede consultar el libro de Feynman y Hibbs [20] y el trabajo original de Feynman [21]. Una presentación más matemática se puede encontrar en Simon [22] y Thirring [23].

#### 2.2 FUNCION DE PARTICION

Consideremos  $N$  partículas cuánticas ( $Q$ ) idénticas en interacción con el campo EM cuantificado  $\vec{A}_Q(\vec{x})$ . El hamiltoniano  $H_Q$  para el sistema en el gauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_Q(\vec{x}) = 0$ ) y en la imagen de Schrodinger está dado por [17]

$$H_Q = H_{p,q} + H_{EM,q} + H_C \quad (2.1.a)$$

$$H_{p,q} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \left[ \vec{p}_i - \frac{q}{c} \vec{A}_Q(\vec{x}_i) \right]^2 \quad (2.1.b)$$

$$H_{EM,q} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} |c(\vec{k})|^2 \left[ |\Pi(\vec{k},\lambda)|^2 + \omega^2 |Q(\vec{k},\lambda)|^2 \right] \quad (2.1.c)$$

$$H_C = \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi |\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \quad (2.1.d)$$

donde hemos usado unidades de Heavyside-Lorentz racionalizadas y donde

$$\vec{A}_Q(\vec{x}) = ic \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) Q(\vec{k},\lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (2.2)$$

$Q(\vec{k},\lambda)$  y  $\Pi(\vec{k},\lambda)$  son los operadores asociados a  $q(\vec{k},\lambda,t)$  y  $\pi(\vec{k},\lambda,t)$ , satisfacen reglas de conmutación canónicas y verifican

$$Q^\dagger(\vec{k},\lambda) = Q(-\vec{k},\lambda), \quad \Pi^\dagger(\vec{k},\lambda) = \Pi(-\vec{k},\lambda), \quad (2.3)$$

que nos dice que  $Q$  y  $\Pi$  no son autoadjuntos pero nos garantiza que  $\vec{A}_Q(\vec{x})$  sí que lo es. Nótese que en (2.1.c) hemos omitido la energía del vacío, sobre lo cual volveremos más adelante.

En el subespacio de  $N$  fermiones idénticos en un campo EM, el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} |\vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\vec{q}\}\rangle \right\} \quad (2.4)$$

forma una base ortonormal. La suma  $\sum_P$  está extendida a las permutaciones de  $N$  objetos, y  $\varepsilon(P)$  es el orden de la permutación  $P$ . El estado  $|\vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\vec{q}\}\rangle$  es aquel en el que la partícula  $P_1$  se encuentra en  $\vec{x}_1, \dots$ , la partícula  $P_N$  en  $\vec{x}_N$  y los osciladores armónicos del campo EM en un estado que denotamos  $\{\vec{q}\}$ .

La función de partición cuántica en una colectividad canónica para un sistema de hamiltoniano  $H_Q$  está dada por [19]

$$Z_Q = \text{tr} [ \exp(-\beta H_Q) ] .$$

Usando para nuestro sistema la base (2.4) para calcular la traza tenemos

$$Z_{N,Q} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \prod_{\vec{k}, \lambda} d\vec{q}(\vec{k}, \lambda) \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} . \quad (2.5)$$

$$\cdot \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\vec{q}\} | \exp(-\beta H_Q) | \vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\vec{q}\} \rangle$$

donde ahora  $H_Q$  está dado por (2.1). Cada uno de los elementos de matriz que aparece en (2.5) es la amplitud de probabilidad de que el sistema, que en el instante  $t = 0$  se encontraba en el estado  $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\vec{q}\}\rangle$ , se encuentre en  $t = -i\beta\hbar$  en  $|\vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\vec{q}\}\rangle$ . Dicha amplitud de probabilidad se pue

de expresar mediante una integral de camino de Feynman, a tiempo real  $\tau = it$ , de la forma

$$F(\vec{x}, \vec{x}'; \beta \hbar) \equiv \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\vec{q}\} | \exp(-\beta H_a) | \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N; \{\vec{q}\} \rangle =$$

$$= \int \prod_{\tau} \prod_{i=1}^N \frac{d^3 \vec{x}_i(\tau) d^3 \vec{p}_i(\tau)}{(2\pi \hbar)^3} \prod_{\vec{k}, \lambda} \frac{dq(\vec{k}, \lambda, \tau) d\pi(\vec{k}, \lambda, \tau)}{2\pi \hbar} \times \quad (2.6)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta \hbar} d\tau \left[ i \sum_{j=1}^N \vec{p}_j(\tau) \dot{\vec{x}}_j(\tau) + i \sum_{\lambda=1,2} \int d^3 k \pi(\vec{k}, \lambda, \tau) \dot{q}(\vec{k}, \lambda, \tau) - H_a(\tau) \right] \right\},$$

donde  $H_{C1}(\tau)$  está dado en la sección 1.2 con  $it = \tau$ . Evaluando (2.6) (ver apéndice A) e introduciendo lo que resulta en (2.5) obtenemos

$$Z_{N,a} = \frac{Z_{EM,a}}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \sum_P (-1)^{\epsilon(P)} \prod_{j=1}^N \int_{\vec{x}_j(P_j)}^{\vec{x}_j} d^3 \vec{y}_j \exp[G(\vec{y})], \quad (2.7)$$

donde

$$Z_{EM,a} = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{2(\cosh \beta \omega \hbar - 1)} \quad (2.8)$$

$$d^3 \vec{y}_j \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(m^{-1} 2\pi \hbar \delta)^{3/2}} \prod_{l=1}^M \frac{d^3 \vec{y}_{i,l}}{(m^{-1} 2\pi \hbar \delta)^{3/2}} \quad (2.9)$$



$$G(\vec{q}) = \frac{1}{\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \delta \left[ -\frac{m}{2} \left( \frac{\vec{q}_{i,l} - \vec{q}_{i,l-1}}{\delta} \right)^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi |\vec{q}_{i,l} - \vec{q}_{j,l}|} \right] . \quad (2.10)$$

$$-\frac{q^2}{2\hbar} \sum_{l,l'=1}^{M+1} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (\vec{q}_{i,l} - \vec{q}_{i,l'})^\alpha P_{\alpha\beta}^{\ell\ell'} (\vec{q}_{j,l} - \vec{q}_{j,l'})$$

con

$$P_{\alpha\beta}^{\ell\ell'} = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|c(k)|^2}{\omega^2} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) f^{\ell\ell'}(p\hbar) . \quad (2.11)$$

$$\cdot \exp \left\{ \frac{i}{2} k \left[ \vec{q}_{i,l} + \vec{q}_{i,l-1} - (\vec{q}_{j,l} + \vec{q}_{j,l-1}) \right] \right\} \varepsilon_\beta(k, \lambda) ,$$

$$f^{\ell\ell'}(p\hbar) = \frac{e^{-\omega\delta|l-l'|} + e^{\omega\delta|l-l'|} e^{-\omega p\hbar}}{1 - e^{-\omega p\hbar}} \quad (2.12)$$

y

$$\delta = \frac{p\hbar}{M+1}$$

Analícemos a continuación el significado físico de la ecuación (2.7). Lo primero que nos aparece es la función de partición cuántica del campo EM libre  $Z_{EM,Q}$ . Para verlo escribimos (2.8) en la forma

$$Z_{EM,Q} = \prod_{k,\lambda} \frac{e^{-\omega p\hbar}}{1 - e^{-\omega p\hbar}} .$$

Ahora bien, el factor  $\exp(-\omega \beta \hbar)$  corresponde al estado fundamental (el vacío en un espacio de Fock) del oscilador asociado al modo  $(\vec{k}, \lambda)$ . Pero en todo lo que hemos hecho hemos ignorado el desplazamiento debido a la energía del vacío, de tal forma que si lo hubiésemos tenido en cuenta, en lugar de (2.1.c) deberíamos haber escrito

$$H_{EM,Q} = \frac{\hbar}{2} V \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |c(k)|^2 \omega$$

Este término extra cancela la contribución del estado fundamental en  $Z_{EM,Q}$  quedando

$$Z_{EM,Q} = \prod_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{1 - e^{-\omega \beta \hbar}},$$

que es la función de partición de Planck [18]

En (2.7), además de  $Z_{EM,Q}$ , nos aparece una integral funcional sobre  $\mathcal{D}^3 y_j$ . El exponente de esta integral, dado por (2.10), tiene tres términos. El primero de ellos corresponde a la energía libre de las partículas; el segundo a una interacción instantánea, (misma 1), mediante potenciales de Coulomb; y el tercero a una interacción a distintos tiempos (1 y 1') a través de un propagador  $P_{\alpha\beta}^{11'}$ .

Nótese que en (2.7) no aparecen las variables del campo EM. Esta eliminación de las variables EM está en la línea de lo que hacen Feynman y Hibbs [21]. Allí se estudian amplitudes de transición para procesos concretos, y se eliminan las variables EM de la integral funcional cuando los estados inicial y final están dados, mientras que en nuestro caso estos estados pueden ser cualesquiera de los generados por la base (2.4). Es precisamente esta eliminación la que da lugar a una interacción entre las partículas bili-

neal en sus velocidades y propagada por  $P_{ap}^{11'}$ .

### 2.3 VALORES ESPERADOS DE LOS CAMPOS $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ Y DE LA ENERGIA

El valor esperado de un observable  $O$  en la colectividad canónica viene dado por [19]

$$\langle O \rangle_a = \frac{\text{tr}[\exp(-\beta H_a) O]}{Z_{N,a}}. \quad (2.13)$$

Teniendo en cuenta (2.2) y usando la base (2.4), la ecuación (2.13) da para  $\langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_a$  la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_a &= \frac{ic}{N! Z_{N,a}} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int \prod_{\vec{k}, \lambda} d\tilde{q}(\vec{k}, \lambda) \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \\ &\cdot \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\tilde{q}\} | \exp(-\beta H_a) Q(\vec{k}, \lambda) | \vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\tilde{q}\} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, el elemento de matriz que hay dentro de la integral es igual a  $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\tilde{q}\} | \exp(-\beta H_a) | \vec{x}_1(p_1), \dots, \vec{x}_N(p_N); \{\tilde{q}\} \rangle \tilde{q}(\vec{k}, \lambda)$ .

Entonces podemos proceder de la misma forma que en el caso de la función de partición; la única diferencia es la integral final sobre  $\prod_{\vec{k}, \lambda} d\tilde{q}(\vec{k}, \lambda)$ , la cual también se puede efectuar, resultando

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_a &= \frac{Z_{EM,a}}{N! Z_{N,a}} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3 \vec{k} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} \\ &\cdot \prod_{j=1}^N \int_{\vec{x}_j(p_j)}^{\vec{x}_j} d^3 \vec{q}_j \frac{(c+D)(e^{\omega p \hbar} - 1)}{(\cosh \omega p \hbar - 1)} \exp[\phi(\vec{q})] \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde

$$C = \frac{-1}{2\omega} \sum_{l=1}^{M+1} \delta e^{-\omega l \delta} \sum_{i=1}^N y_i^l, \quad D = \frac{-1}{2\omega} \sum_{l=1}^{M+1} \delta e^{-\omega(\beta \hbar - l \delta)} \sum_{i=1}^N y_i^l \quad (2.15)$$

$$y_i^l = q \frac{c(\vec{k})}{(2\pi)^{3/2}} \vec{E}(\vec{k}, \lambda) \left( \frac{\vec{y}_{i,l} - \vec{y}_{i,l-1}}{\delta} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{y}_{i,l}} \quad (2.16)$$

Análogamente, para el campo magnético se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \vec{B}(\vec{x}) \rangle_Q &= \frac{Z_{EM,Q}}{N! Z_{N,Q}} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \, \vec{k} \wedge \vec{E}(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \sum_P (-1)^{E(P)} \cdot \\ &\cdot \prod_{j=1}^N \int_{\vec{x}_j(P_j)}^{\vec{x}_j} d^3\vec{y}_j \frac{(C+D)(e^{\omega\beta\hbar} - 1)}{(\cos \omega\beta\hbar - 1)} \exp[G(\vec{q})]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

El valor esperado del campo eléctrico es la suma de dos términos,

$$\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_Q = \langle i \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{E}(\vec{k}, \lambda) \Pi(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \rangle_Q + \langle \vec{\nabla} \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}_i|} \rangle_Q.$$

A la hora de calcular el primero vamos a tener elementos de matriz del tipo  $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{\vec{q}\} | \exp(-\beta H_Q) \Pi(\vec{k}, \lambda) | \vec{x}_1(P_1), \dots, \vec{x}_N(P_N); \{\vec{q}\} \rangle$ .

Para evaluarlos los ponemos como integrales de camino de Feynman, en las cuales efectuamos la integración sobre los  $\Pi(\vec{k}, \lambda)$  y así

obtenemos un factor  $\sum_{l=1}^{M+1} [q_l(\vec{k}, \lambda) - q_{l-1}(\vec{k}, \lambda)]$ , que por la con

dición de traza  $q_{M+1}(\vec{k}, \lambda) = q_0(\vec{k}, \lambda) = \tilde{q}(\vec{k}, \lambda)$  se anula. Así pues,

$$\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_a = \frac{Z_{EM,a}}{N! Z_{N,a}} \vec{\nabla} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|} \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^N \int_{\vec{x}_j(p_j)}^{\vec{x}_j} d^3 \vec{q}_j \exp[G(\vec{q})] \quad (2.18)$$

Con respecto a la energía, su valor esperado se puede hallar utilizando

$$\langle H \rangle_a = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{N,a} \cdot \quad (2.19)$$

### CAPITULO 3

#### LIMITE CLASICO DE LA MECANICA ESTADISTICA CUANTICA DE LA ELECTRODINAMICA NO RELATIVISTA

##### 3.1 INTRODUCCION

Vamos a abordar en este capítulo el problema del límite clásico. Se trata de probar que los resultados clásicos del capítulo 1 se recuperan a partir de los cuánticos del capítulo 2 cuando se toma el límite en que la constante de Planck tiende a cero. En la sección 3.2 demostraremos esto para la función de partición y calcularemos la primera corrección cuántica a la función de partición clásica. En la 3.3 probaremos que los valores esperados cuánticos de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$  y  $H$  tienden a los valores medios clásicos de las mismas magnitudes cuando  $\hbar \rightarrow 0$ . En la cuarta sección compararemos nuestro trabajo con otros ya existentes en la literatura actual y mostraremos la existencia de divergencias ultravioletas. Por último, en §3.5 expondremos los resultados si la interacción es con un campo escalar real en lugar de con un campo EM.

##### 3.2 LIMITE CLASICO Y PRIMERA CORRECCION CUANTICA A LA FUNCION DE PARTICION

Tenemos que estudiar el límite  $\hbar \rightarrow 0$  de la función de partición cuántica  $Z_{N,Q}$  dada por (2.7). Para ello vamos a suponer que las trayectorias  $\vec{y}_{i,1}$  de la integral de camino (2.7) se pueden escribir

$$\vec{y}_{i,l} = \vec{x}_i(p_i) + \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_i(p_i)}{\beta \hbar} l\delta + \vec{\xi}_{i,l} \quad (3.1)$$

con  $\vec{\xi}_{i,1}$  satisfaciendo las condiciones de contorno

$$\vec{\xi}_{i,0} = \vec{\xi}_{i,M+1} = 0. \quad (3.2)$$

Si en lugar de utilizar las variables discretizadas temporalmente, como consecuencia de la partición del intervalo temporal  $[0, \beta\hbar]$  en  $M+1$  subintervalos de longitud  $\delta$ , usamos las variables en el continuo, las dos ecuaciones anteriores toman la forma

$$\vec{y}_i(\tau) = \vec{x}_i(p_i) + \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_i(p_i)}{\beta\hbar} \tau + \vec{\xi}_i(\tau)$$

$$\vec{\xi}_i(0) = \vec{\xi}_i(\beta\hbar) = 0.$$

No obstante, vamos a seguir con la forma discreta pues, a la hora de tener que evaluar alguna integral de camino, tendremos que acudir a ella.

Recordemos que la función de partición cuántica de  $N$  fermiones idénticos está dada por [24]

$$Z_{N,Q} = \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} \sum_P (-1)^{\epsilon(P)} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \exp \left\{ -\frac{m}{2\beta\hbar^2} \sum_{j=1}^N [\vec{x}_j - \vec{x}_j(p_j)]^2 \right\}.$$

Si en ella tomamos el límite  $M \rightarrow 0$  la única permutación que contribuye es la identidad ( $\mathbb{1}$ )

$$Z_{N,Q} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} V^N = Z_{N,cl} ,$$

donde  $V$  es el volumen ocupado por las partículas. Es más, cuando las partículas interaccionan a través de un potencial instantáneo local, las primeras correcciones cuánticas a la energía libre, de órdenes  $\hbar$  y  $\hbar^2$  (con  $\beta$  fijo y finito), son también debidas a la identidad. Las contribuciones provenientes de las permutaciones distintas de la identidad producen correcciones de intercambio de órdenes superiores en  $\hbar$ , tanto para partículas libres como para partículas que interaccionan mediante potenciales instantáneos; su forma específica (de orden  $\hbar^3$ ) para la energía libre de partículas sin interacción es conocida. Sobre este tema pueden consultarse los tratados de Huang [24], capítulos 10 y 11, y de Landau-Lifschitz [25], sección 33. Todo esto nos dice que cuando introducimos una interacción mediada por el campo EM dinámico, que puede ser considerada como una perturbación, las primeras correcciones cuánticas vendrán también de la permutación  $\mathbb{I}$ . Las correcciones de intercambio debidas a otras permutaciones serán de órdenes superiores en  $\hbar$ . Por tanto, podemos tomar  $P = \mathbb{I}$  en (2.7), que implica que (3.1) debe sustituirse por

$$\vec{y}_{i,l} = \vec{x}_i + \vec{\xi}_{i,l} . \quad (3.3)$$

Para estimar el orden de magnitud de  $\vec{\xi}_{i,1}$  procedemos de la misma forma que en el caso de caminos brownianos: igualamos a la parte cinética del exponente (2.10) de la integral de camino (2.7) [26]. Nótese que esto equivale a exigir que la acción de las partículas debida a su movimiento libre sea del orden de  $\hbar$ . Usando que  $\sum_{l=1}^{M,i} \delta$  es del orden de  $\beta\hbar$  y procediendo de esta forma



tenemos que

$$\left( \frac{\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l-1}}{\delta} \right)^2 \sim \frac{1}{\beta m} . \quad (3.4)$$

En el continuo habría que usar  $\int_0^{\beta M} d\tau \sim \beta M$  para obtener que  $\dot{\vec{\xi}}_i^2(\tau) \sim 1/\beta m$ . Recordemos ahora que  $\delta = \beta M/(M+1)$ , lo que podría llevarnos a escribir sin más que  $\delta \sim \beta M$ . Sin embargo, hay que precisar un poco más ya que si tomamos el límite continuo  $M \rightarrow \infty$  para  $\beta M$  finito distinto de cero llegamos a  $\delta \rightarrow 0$ , en contradicción con  $\delta \sim \beta M$ . Pero si  $M \rightarrow 0$  esta dificultad desaparece. Así pues, diremos que en el límite clásico ( $M \rightarrow 0$ )  $\delta \sim \beta M$ , con lo que (3.4) implica que

$$\vec{\xi}_{i,l}^2 \sim \frac{\beta \hbar^2}{m} . \quad (3.5)$$

En el lenguaje del continuo lo anterior es equivalente a decir que cuando  $M \rightarrow 0$  el tiempo que tarda la partícula en cambiar de posición es el de orden de  $\beta M$ , y entonces  $\dot{\vec{\xi}}_i^2(\tau) \sim 1/\beta m$  implica que  $\vec{\xi}_i^2(\tau) \sim \beta M^2/m$ .

Hasta ahora sólo hemos hablado de  $M$ . Veamos qué papel juega  $\beta$ . Por estar en una situación no relativista hay dos hipótesis que cumplir: i/  $M k_{\max} \ll mc$  y ii/  $\beta^{-1} \ll mc^2$ . Pero además, la temperatura debe ser suficientemente alta ( $\beta$  suficientemente pequeña) para que  $\beta M$  no pueda crecer indefinidamente.

Haciendo un desarrollo en serie de potencias de  $M$  para (2.7), bajo las hipótesis (3.2)-(3.5), se llega, tras un cálculo laborioso, a

$$Z_{N,q} = \frac{1}{N!} Z_{EM,q} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \exp \left\{ -\beta \sum_{i>j=1}^N \frac{q^2}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right\} \times$$

$$\times \left[ 1 - 2N \frac{\beta\hbar^2}{m^2} \mathcal{C} + 2N \frac{\beta^2\hbar^2 c^2}{m} \mathcal{C} + \frac{3}{2} \frac{\beta^3\hbar^2}{m} \left( \frac{q}{2\pi} \right)^2 \mathcal{D} + O(\hbar^3) \right], \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  están dadas por

$$\mathcal{C} = \left( \frac{q}{c} \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |c(k)|^2, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{D} = \sum_{i>j=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{D_{\alpha}^{ij} D_{\alpha}^{ij}}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j| |\vec{x}_i - \vec{x}_j|}, \quad D_{\alpha}^{ij} = \frac{(x_i - x_j)_{\alpha}}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2}. \quad (3.8)$$

Para una obtención detallada de (3.6) véase el apéndice B. Los términos en (3.6) que van con  $\beta\hbar^2$  y  $\beta^2\hbar^2$  proceden de la autointeracción de las partículas, y el que va con  $\beta^3\hbar^2$  de las interacciones coulombianas dipolo-dipolo. Estos términos dan expresiones explícitas para las primeras correcciones cuánticas a la función de partición clásica, y, por tanto, al comportamiento clásico de N partículas idénticas cargadas en un campo EM. A su vez, la interacción entre distintas partículas mediada por el campo EM y la coulombiana de tipo cuadrupolar no contribuyen a orden  $\hbar^2$ .

La ecuación (3.6) nos dice que las correcciones cuánticas debidas a la interacción con  $P=1$  son de orden  $\hbar^2$ , y, por ende, son más importantes que las debidas a la indistinguibilidad de las partículas ( $P \neq 1$ ), que en el caso libre van con  $\hbar^3$ . Nótese también que las correcciones que tienen su origen en la autoenergía de las par

tículas son proporcionales a  $\mathcal{C}$ . Ahora bien, si en (3.7) eliminamos el factor de corte ultravioleta,  $\mathcal{C}$  diverge cúbicamente. Esta divergencia da lugar a una divergencia lineal para  $Z_{N,Q}$ , según se prueba en la siguiente sección, que se puede eliminar mediante un proceso de renormalización. Dicha renormalización la llevaremos a cabo en la tercera parte de la memoria, ya para el caso relativista.

De (3.6) y de

$$Z_{EM,Q} = \prod_R \frac{1}{2(\cosh \omega_B \hbar - 1)} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \prod_R \left( \frac{1}{\omega_B \hbar} \right)^2 = Z_{EM,d}$$

se sigue que

$$Z_{N,Q} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} Z_{N,d} \quad , \quad (3.9)$$

que es una generalización del resultado 15.9 de [22].

Para  $N = 1$ , (3.6) se reduce a

$$Z_{N=1,Q} = Z_{EM,Q} \left( \frac{m}{2\pi \beta \hbar^2} \right)^{3/2} \left[ 1 - 2 \frac{\beta \hbar^2}{m^2} \mathcal{C} + 2 \frac{\beta^2 \hbar^2 c^2}{m} \mathcal{C} + O(\hbar^3) \right] ,$$

donde el corchete es igual o menor que 1, (recuérdese que  $\beta^{-1} \ll mc^2$ ), lo que concuerda con la cota (A.7) dada en el apéndice A.

### 3.3 LIMITE CLASICO DE LOS VALORES ESPERADOS (CUANTICOS) DE $\vec{A}$ , $\vec{B}$ , $\vec{E}$ Y $H$

Aquí simplemente nos vamos a limitar a dar los resultados para los límites  $\hbar \rightarrow 0$  de  $\langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_Q$ ,  $\langle \vec{B}(\vec{x}) \rangle_Q$ ,  $\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_Q$  y  $\langle H \rangle_Q$ . Para una obtención detallada de los mismos puede consultarse el apéndice C.

$$\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle_Q \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0 + O(\hbar^3), \quad (3.10)$$

$$\langle \vec{B}(\vec{r}) \rangle_Q \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0 + O(\hbar^3), \quad (3.11)$$

$$\langle \vec{E}(\vec{r}) \rangle_Q \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0 + O(\hbar^3), \quad (3.12)$$

$$\langle H \rangle_Q \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \langle H \rangle_{cl} - qN \frac{\hbar^2}{m^2} \zeta - 6N \frac{p^2 \hbar^2 c^2}{m} \zeta + q \frac{p^2 \hbar^2}{m} \left( \frac{q}{2\pi} \right)^2 \mathcal{D} + O(\hbar^3). \quad (3.13)$$

De estas ecuaciones y (1.12), (1.13) y (1.15) se sigue que los resultados clásicos se recuperan a partir de los cuánticos tomando el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . Nótese que las correcciones a  $\langle H \rangle_{cl}$  son de un orden menos en  $\hbar$  que las debidas a  $P \neq \hbar$  en el caso de partículas libres, de acuerdo con la filosofía que nos llevó a restringirnos a  $P = \hbar$ .

### 3.4 ANALISIS COMPARATIVO CON OTROS METODOS Y TRABAJOS

#### El método de la aproximación semiclásica de Wigner-Kirwood

Wigner y Kirwood [27] desarrollaron un método para estudiar las primeras correcciones cuánticas a la función de partición clásica para un sistema formado por N fermiones idénticos sin inter-

acción mutua y sometidos a un potencial. Su método se basa en la resolución de una ecuación de Bloch de forma aproximada. Si se trata de generalizar este método a nuestro sistema aparecen nuevas dificultades que impiden dar expresiones compactas, como las dadas en (3.6), para las correcciones cuánticas a la función de partición clásicas, por lo que el método aquí desarrollado parece más adecuado. Las dificultades antes mencionadas tienen su origen en la naturaleza de nuestro sistema: interacción mutua y acoplamiento mínimo a un campo vectorial dinámico.

Por otro lado nuestro estudio está en la línea del trabajo de Feynman [21], en el que recupera la ecuación de Schrodinger estudiando el comportamiento de una integral de camino a tiempos pequeños.

#### El método de la aproximación del campo quasi-constante

Vamos a comparar el procedimiento empleado en la sección 2 de este capítulo con el método llamado de la aproximación del campo quasi-constante, ya usado por Halpern y Siegel [28]. El punto de partida es la ec. (2.5), sólo que ahora para evaluar el propagador (2.6) dividimos el espacio de la  $\vec{x}$  en pequeñas celdas  $\alpha$  de volumen  $V_\alpha$ , y en cada una de ellas desarrollamos el campo EM en serie de potencias de  $\vec{x} - \vec{x}_\alpha$ , siendo  $\vec{x}_\alpha$  el centro de esa celda:

$$\vec{A}_\alpha(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}_\alpha) + \sum_{\eta=1}^3 (x - x_\alpha)^\eta \left[ \partial_\eta \vec{A}(\vec{x}) \right]_{\vec{x}=\vec{x}_\alpha} + \dots \quad (3.14)$$

Si nos quedamos sólo con el primer término de este desarrollo (aproximación del campo quasi-constante), tenemos en cuenta que en esta aproximación  $\vec{p}$  y  $\vec{A}_\alpha(\vec{x})$  conmutan, procedemos de la misma forma que en la sección 2 y tomamos el límite  $V_\alpha \rightarrow 0$  llegamos a que

$$Z_{N,Q}^{(0)} = \frac{1}{N!} Z_{EM,Q} \left( \frac{m}{2\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \sum_P (-1)^{\epsilon(P)} \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ -\beta \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi |\vec{x}_i(P_i) - \vec{x}_j(P_j)|} - \frac{m}{2\beta\hbar^2} \sum_{i=1}^N [\vec{x}_i - \vec{x}_i(P_i)]^2 \right\},$$

donde el superíndice (0) hace referencia a la aproximación tomada en (3.14). En el límite  $N \rightarrow 0$  sólo la permutación identidad contribuye a  $Z_{N,Q}^{(0)}$ , obteniéndose (3.9). Las contribuciones de las otras permutaciones tienden a cero más rápidamente que las correcciones cuánticas para  $P = \mathbb{I}$  obtenidas en la sección 2 de este capítulo, (lo que es un argumento más en favor de la restricción  $P = \mathbb{I}$ ).

Nótese que  $Z_{N,Q}^{(0)}$  no contiene efectos del campo EM dinámico. Ello es debido a la aproximación del campo quasi-constante con que nos hemos quedado en (3.14).

#### El problema del polarón

Feynman [18] estudió la interacción de un electrón con un campo escalar de fonones usando integrales de camino. Vamos a comentar las diferencias que hay entre su trabajo y el nuestro. El se restringió a valores de  $\beta$  muy grandes, que equivale a reemplazar la función  $f^{11'}(\beta M)$  de (2.12) por  $\exp(-\omega\delta|1-1'|)$ . Nótese que en (2.12)  $\beta$  aparece multiplicada por  $M$ , por lo que suponer  $\beta \rightarrow \infty$  equivale en cierto modo a  $\beta M \rightarrow \infty$ , que difiere de lo hecho por

nosotros ( $\beta M \rightarrow 0$  con  $\beta$  finito). Hay, además, otras diferencias debidas a la naturaleza vectorial del campo EM, el acoplamiento mínimo, el número de partículas, etc.

#### Divergencias ultravioletas

En todo lo que hemos hecho las divergencias ultravioletas las hemos eliminado introduciendo un factor de corte. Ahora bien, si suprimimos este factor de corte, (es decir, hacemos  $c(k) = 1$  para  $|\vec{k}| \leq \Lambda$  y  $c(k) = 0$  para  $|\vec{k}| > \Lambda$  con  $\Lambda \rightarrow \infty$ ), resulta que las primeras correcciones cuánticas de (3.6) divergen cúbicamente en el ultravioleta ( $\mathcal{O} = q^2 \Lambda^3 / 6 \pi^2 c^2$ ) aun en el caso  $N = 1$ . Tal divergencia es superior a la lineal que aparece cuando se estudia la corrección radiativa a la masa del electrón en Electrodinámica Cuántica no relativista a temperatura nula [29].

Lo que ocurre es que la divergencia cúbica que nos ha aparecido no es realmente cúbica, tal y como vamos a ver. El hamiltoniano (2.1) y la función de partición (2.5) tienen significado físico en el marco no-relativista, caracterizado por i/  $M\Lambda \ll mc$  y ii/  $\beta^{-1} \ll mc^2$ . Es más, el cálculo de las correcciones cuánticas a la función de partición tiene sentido para temperaturas suficientemente grandes. Todo esto sugiere que  $\beta^{-1}$  debe variar en un intervalo

$$\frac{(\hbar\Lambda)^2}{2m} - \xi_1 < \beta^{-1} < \frac{(\hbar\Lambda)^2}{2m} + \xi_2, \quad (3.15)$$

donde  $\xi_1$  es pequeño comparado con  $(M\Lambda)^2/2m$  y  $\xi_2$  es tal que se satisfaga la condición no-relativista ii/.

Para una rápida estimación supongamos que  $\beta^{-1}$  es del orden de  $(M\Lambda)^2/2m$ , que es consistente con i/ y ii/. Entonces las dos primeras correcciones cuánticas de (3.6) se transforman en

$$\frac{\beta \hbar^2}{m^2} \mathcal{C} \approx \frac{1}{3\pi^2} \frac{q^2}{mc^2} \Lambda, \quad \frac{\beta^2 \hbar^2 c^2}{m} \mathcal{C} \approx \frac{\beta mc^2}{3\pi^2} \frac{q^2}{mc^2} \Lambda.$$

Vemos que la divergencia cúbica ha desaparecido y se ha transformado en lineal. Se llega al mismo resultado si  $\beta^{-1}$  varía en el intervalo (3.15).

La eliminación de las divergencias ultravioletas no la vamos a llevar a cabo en este marco no relativista, sino que la efectuaremos en una situación relativista covariante (Teoría Cuántica de Campos) en la tercera parte de esta memoria. Baste decir aquí, a modo de relación, que en Teoría Cuántica de Campos un desarrollo en loops equivale a un desarrollo en potencias de  $\hbar$ .

#### Análisis del límite $\hbar \rightarrow 0$ en términos de longitud de ondas

Vamos a describir el problema del límite clásico de una forma cualitativa en términos de las longitudes características del sistema. La primera de ellas es la distancia  $d$  entre las partículas, relacionada con la densidad  $\rho$  mediante  $\rho = d^{-3}$ . Otras tres longitudes características son las longitudes de onda térmica  $\lambda_T$ , de de Broglie  $\lambda_B$  y Compton  $\lambda_C$ , dadas respectivamente por

$$\lambda_T = \left( \frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{1/2}, \quad \lambda_B = \frac{\hbar}{(2mE)^{1/2}}, \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{mc}.$$

De las hipótesis no relativistas (recuérdense las condiciones i/ y ii/ del apartado anterior) se sigue que  $\lambda_T \gg \lambda_C$  y que las longitudes de onda  $\lambda$  de los fotones son tales que  $\lambda \gg \lambda_C$ . A su vez, de la condición clásica (validez del principio de equipartición de la energía) se tiene que  $\lambda_T \sim \lambda_B$ .



Las situaciones no relativista y clásica son posibles simultáneamente. En efecto, supongamos que  $\lambda \sim \lambda_T$ . Entonces la hipótesis clásica ( $\lambda_T \sim \lambda_B$ ) nos garantiza que hay interacción entre electrones y fotones pues  $\lambda \sim \lambda_B$ . Por otro lado,  $\lambda \sim \lambda_T$  implica que  $\hbar|\vec{k}|/mc \sim (\beta mc^2)^{-1/2}$ . La hipótesis no relativista ( $\lambda \gg \lambda_C$ ) nos dice que  $(\beta mc^2)^{-1/2} \ll 1$ , lo que es consistente (con ii/).

Cuando nos restringimos a la permutación identidad en el análisis del límite clásico estamos usando implícitamente  $d \gg \lambda_T$ .

Por completitud, se podría añadir una quinta longitud, la longitud de onda de Debye  $\lambda_D = (q^2 \rho \beta)^{-1/2} \ll d$ , la cual juega un papel muy importante en el estudio de los plasmas clásicos [19,30].

Antes de terminar esta primera parte un comentario, que no una prueba, acerca de la estabilidad de la materia. Se puede ver como caso particular de (3.9) que un sistema fermiónico cuántico con fuerzas de Coulomb puras y sin interacción con el campo EM coincide con el sistema coulombiano clásico cuando  $\hbar \rightarrow 0$ , (que es el mismo hacia el que tiende nuestro sistema para  $\hbar \rightarrow 0$ ). Pues bien, este hecho, (3.9) y la prueba de la estabilidad de la materia fermiónica con fuerzas de Coulomb puras por Lieb y Thirring [31] indican que, al menos, en el límite clásico, la estabilidad de la materia para el sistema descrito por (2.7) debería ser cierta. Un estudio clásico del equilibrio entre una partícula cargada y la radiación se puede encontrar en los trabajos de Blanco, Pesquera y Santos [32].

### 3.5 EL CASO ESCALAR

En esta sección vamos a estudiar la Mecánica Estadística de un sistema en equilibrio termodinámico formado por  $N$  partículas idénticas de masa  $m$ , posiciones  $\vec{x}_i$  y momentos  $\vec{p}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) en interacción con un campo escalar real  $\phi(\vec{x}, t)$ . Los métodos a utilizar son los mismos que en el caso EM, por lo que sólo daremos los resultados.

El hamiltoniano clásico es

$$H_a = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[ (\vec{\nabla}\phi)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right] + g \sum_{i=1}^N \phi(\vec{x}_i, t)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ c(\vec{k}) a(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} + c.c. \right],$$

con  $g$  la constante de acoplamiento. A partir de este  $H$  obtenemos la función de partición

$$Z_{N,a} = \frac{1}{N!} \left( \frac{1}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} Z_{S,a} \exp(-\beta N H_0) \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \exp \left\{ -\beta \sum_{i,j=1}^N V_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \right\},$$

donde

$$Z_{S,a} = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} \beta \hbar}$$

es la función de partición clásica para el campo libre,  $H_0$  es la autoenergía clásica para una partícula en un campo escalar,

$$H_0 = - \frac{g^2 c^2}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|c(\vec{k})|^2}{\omega^2},$$

y  $V_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$  es el potencial

$$V_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j) = - \frac{g^2 c^2}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|c(\vec{k})|^2}{\omega^2} e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)},$$

con

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{M^2 c^4}{\hbar^2} ,$$

siendo  $M$  la masa de los bosones escalares. Hemos reducido la interacción de las partículas con el campo escalar a una interacción entre partículas distintas mediante un potencial  $V_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$ , que es precisamente lo contrario a lo que hace Wiegel [33]. Hay que notar la aparición en la función de partición de una autoenergía clásica  $H_0$ . Comparando con lo que ocurre para el campo EM, la ausencia en (1.8) de una autoenergía no electrostática clásica, aun en el caso de una sola partícula [34], la podemos atribuir al acoplamiento mínimo.

La función de partición cuántica está dada por

$$Z_{N,q} = \frac{1}{N!} Z_{S,q} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \sum_P (-1)^{\varepsilon(P)} \prod_{j=1}^N \int_{\vec{x}_j(P)}^{\vec{x}_j} d^3 \vec{y}_j \exp[G(\vec{y})] ,$$

donde hemos usado la notación (2.9),

$$Z_{S,q} = \prod_k \left[ \frac{1}{2(\cosh \omega_p \hbar - 1)} \right]^{1/2}$$

es la función de partición cuántica para bosones libres de spin cero, y  $G(\vec{y})$  tiene la forma

$$G(\vec{q}) = -\frac{m\delta}{2\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{q}_{i,l} - \vec{q}_{i,l-1}}{\delta} \right)^2 + \frac{q^2 c^2}{4\hbar} \sum_{l,l'=1}^{M+1} \sum_{i,j=1}^N \cdot$$

$$\cdot \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|c(\vec{k})|^2}{\omega^2} \exp[i\vec{k}(\vec{q}_{i,l} - \vec{q}_{j,l'})] f^{ll'}(\beta\hbar) ,$$

con  $f^{ll'}$  ( $\beta\hbar$ ) dada por (2.12). Para  $N$  pequeños encontramos

$$Z_{N,q} = \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} Z_{S,q} \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{x}_i \exp \left\{ -\beta [NH_0 + \sum_{i>j=1}^N V_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)] \right\}$$

$$= \left[ 1 + \frac{13}{12} \beta^3 \hbar^2 + O(\hbar^3) \right] \left\{ 1 + \frac{\beta^2 \hbar^2}{2m} \sum_{i>j=1}^N V_1(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \frac{\beta^2 \hbar^2}{m} \sum_{i,j,l=1}^N V_{12}(\vec{x}_i, \vec{x}_j, \vec{x}_l) + O(\hbar^3) \right\} ,$$

con los potenciales  $V_1$  y  $V_{12}$  dados por

$$V_1(\vec{x}_i - \vec{x}_j) = -\frac{q^2 c^2}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{|c(\vec{k})|^2}{\omega^2} k^2 e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} ,$$

$$V_{12}(\vec{x}_i, \vec{x}_j, \vec{x}_l) = -\frac{q^4 c^4}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{|c(\vec{k}_1)|^2}{\omega_1^2} \frac{|c(\vec{k}_2)|^2}{\omega_2^2} (\vec{k}_1, \vec{k}_2) \cdot$$

$$\cdot \exp[i\vec{k}_1(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + i\vec{k}_2(\vec{x}_i - \vec{x}_l)] .$$

Nótese que a orden  $\chi^2$  el campo produce, además de autointeracción, interacción entre partículas distintas. Es inmediato que

$$\bar{Z}_{N,a} \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \bar{Z}_{N,d} .$$

**PARTE II**

**CUANTIFICACION DE UNA TEORIA DE CAMPOS**

**A TEMPERATURA FINITA**

## CAPITULO 4

### CUANTIFICACION POR METODOS FUNCIONALES DE UNA TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

#### 4.1 INTRODUCCION

En la primera parte de esta memoria se ha estudiado, en un marco no relativista, un sistema electrodinámico de muchas partículas. En la sección 3.3 se vió que, cuando se tratan de recuperar los resultados clásicos a partir de los cuánticos como una serie de potencias de  $\hbar$ , aparecen divergencias ultravioletas, cuyo origen físico es la autointeracción de las partículas mediada por el campo EM. Este mismo hecho aparece en la Electrodinámica Cuántica (QED). En efecto, los propagadores libres experimentan correcciones radiativas (divergentes ultravioletas) asociadas a diagramas que se clasifican según el número de "loops" independientes que tengan. Ahora bien, un desarrollo diagramático en términos del número de "loops" independientes puede ser identificado con un desarrollo en potencias de  $\hbar$ . En particular, la primera corrección al propagador del fermión es divergente ultravioleta, la proporciona un diagrama con un "loop" independiente y es de orden  $\hbar^2$  y  $\epsilon^2$ , lo que muestra una analogía total con lo obtenido en la sección 3.3.

En la tercera parte estudiaremos el problema ultravioleta en un contexto mucho más general que el de la primera, el de una formulación relativista covariante. Para ello necesitamos conocer las reglas de Feynman del sistema. Esta segunda parte la dedicamos a la obtención de tales reglas.

Centrándonos en este capítulo, en la sección 4.2 caracterizaremos un sistema a temperatura finita descrito por una teoría de campos. En 4.3 y 4.4 expondremos el método de Bernard para encontrar las reglas de Feynman del sistema de la sección anterior. En 4.5 daremos la deducción de Dolan y Jackiw para pasar de los propagadores de las secciones 4.3 y 4.4 a los que llevan sus nombres; también comentaremos brevemente los inconvenientes que éstos presentan. Por último, en 4.6 veremos en qué consiste la "Thermo-Field Dynamics" y cuáles son sus reglas de Feynman.

En todo lo que resta de memoria vamos a utilizar unidades naturales  $\hbar = c = 1$ .

#### 4.2 FUNCION DE PARTICION COVARIANTE

Un sistema termodinámico relativista descrito por una teoría de campos verifica dos propiedades. La primera es que está caracterizado por un tensor conservado energía-momento  $T^{\mu\nu}$ , un flujo de entropía  $S^\nu$  y un conjunto de corrientes conservadas  $J_A^\nu$  ( $A = 1, 2, \dots$ ). Y la segunda es que se puede considerar como un fluido perfecto, definido como aquel que teniendo en todos sus puntos una velocidad  $\vec{v}$ , un observador que se mueva con esta velocidad ve el fluido en torno suyo como isótropo.

En todo lo que sigue vamos a suponer que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico. Ahora bien, un fluido perfecto en equilibrio termodinámico está caracterizado [1] por un parámetro invariante Lorentz  $\beta^{-1}$  que coincide con la temperatura para  $\vec{v} = 0$  y una cuadvirvelocidad  $u^\nu$

$$\mu^\nu = \gamma (1, \vec{v}) \quad , \quad \gamma = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} \quad , \quad \mu^4 = 1. \quad (4.1)$$

Las variables primarias  $T^{\mu\nu}$ ,  $S^\nu$  y  $J_A^\nu$  en términos de  $u^\nu$  vienen dadas por



$$T^{\nu\tau} = (\rho + p)u^\nu u^\tau - p g^{\nu\tau}, \quad S^\nu = s u^\nu, \quad J_A^\nu = n_A u^\nu$$

donde  $p$ ,  $\rho$ ,  $s$  y  $n_A$  son respectivamente la presión, la densidad de energía, la densidad de entropía y la densidad de partículas propias (y, por tanto, invariantes Lorentz). El cuádrimomento total del sistema es

$$P^\nu = \int_\sigma d\sigma_\tau T^{\nu\tau},$$

con  $\sigma$  una superficie de género espacio perpendicular a la cuadrivelocidad  $u^\nu$ ,

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^4 : x u = x^\nu u_\nu = c t_e\}.$$

La cuantificación se lleva a cabo sobre la superficie de género espacio  $\sigma$  y la ordenación temporal es con respecto al tiempo invariante Lorentz  $xu$ . Entonces, la función de partición en la colectividad macrocanónica (o macrofunción de partición) está dada por

$$Z = \text{tr} \left[ \exp \left\{ -\beta \int d\sigma_\tau (\mu_\nu \hat{T}^{\nu\tau} - \sum_A \mu_A \hat{J}_A^\tau) \right\} \right]. \quad (4.2)$$

donde  $\mu_A$  son los potenciales químicos invariantes Lorentz y  $\hat{T}^{\nu\tau}$  y  $\hat{J}_A^\tau$  los operadores tensor conservado energía-impulso y corrientes conservadas.

En lo que sigue no vamos a evaluar (4.2) sino que vamos a utilizarla como generadora de unas reglas de Feynman (a temperatura

finita). Son varias las razones que nos mueven a ello, todas ellas basadas en las ventajas que ofrece el método perturbativo. Citemos algunas. El análisis de las divergencias ultravioletas es más claro en términos de las funciones de Green. Un estudio detallado de los propagadores permite extraer conclusiones sobre la vida media de las partículas en el fluido térmico y evaluar las correcciones térmicas a los parámetros físicos de la teoría (masas, cargas, etc.). Las relaciones de dispersión, modos de vibración, etc. se pueden estudiar usando reglas de Feynman. También se puede utilizar el método perturbativo para evaluar las propiedades termodinámicas (en el equilibrio). En la tercera parte de la memoria volveremos más detenidamente sobre algunos de los puntos citados aquí.

En las siguientes secciones vamos a calcular las reglas de Feynman.

#### 4.3 REGLAS DE FEYNMAN A LA BERNARD (I): TEORIAS NO GAUGE

En esta sección vamos a hallar las reglas de Feynman para una teoría sin invariancia gauge. Empezaremos calculándolas en el referencial con respecto al cual el fluido se encuentra en reposo, caracterizado porque en él  $\vec{v} = 0$ , y, por tanto,  $u^\nu = (1, \vec{0})$ . Ahora  $\beta^{-1} = T$ , con  $T$  la temperatura en dicho inercial. (Hemos tomado la constante de Boltzman  $k_B$  igual a 1,  $k_B = 1$ ). Seguiremos el trabajo original de Bernard [2], al cual nos remitimos para una exposición más detallada.

En el referencial en reposo, (4.2) toma la forma

$$Z = \text{tr} [\exp(-\beta H)] \quad , \quad \beta^{-1} = T \quad (4.3)$$

con  $H$  el hamiltoniano y donde hemos supuesto, por simplicidad, que los potenciales químicos son cero.

Supongamos que en nuestra teoría sólo interviene un campo  $\phi$ ; (la generalización a varios campos es inmediata). Sean  $\mathcal{H}(\pi, \phi)$  la densidad hamiltoniana,  $\phi(\vec{x}, t)$  el operador campo en imagen de Heisenberg y  $\pi(\vec{x}, t)$  su momento conjugado:

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Llamemos  $|\varphi(\vec{x}); t\rangle$  al vector en imagen de Heisenberg que describe un estado que en el tiempo  $t$  es un autoestado del operador campo  $\phi(\vec{x}, t)$  con autovalor  $\varphi(\vec{x})$ :

$$\phi(\vec{x}, t)|\varphi(\vec{x}); t\rangle = \varphi(\vec{x})|\varphi(\vec{x}); t\rangle.$$

De la misma forma se definen los autoestados de  $\pi(\vec{x}, t)$ :

$$\pi(\vec{x}, t)|n(\vec{x}); t\rangle = n(\vec{x})|n(\vec{x}); t\rangle.$$

La evolución temporal de los operadores y estados viene dada por el hamiltoniano:

$$A(\vec{x}, t_1) = e^{iH(t_1-t_0)} A(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t_1-t_0)}, \quad A = \phi, \pi, \quad (4.4)$$

$$|a(\vec{x}); t_1\rangle = e^{iH(t_1-t_0)} |a(\vec{x}); t_0\rangle, \quad a = \varphi, n. \quad (4.5)$$

Para cada tiempo  $t$  se tiene

$$1 = \int \mathcal{D}a |a(\vec{x}); t\rangle \langle a(\vec{x}); t|, \quad a = \varphi, n. \quad (4.6)$$

Usando (4.4)-(4.6), (4.3) se puede escribir

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi(\vec{x}); t_0 | e^{-\beta H} | \varphi(\vec{x}); t_0 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi(\vec{x}); t_0 - i\beta | \varphi(\vec{x}); t_0 \rangle. \quad (4.7)$$

Cada elemento de matriz bajo el signo de integral tiene una representación como integral funcional

$$\langle \varphi(\vec{x}); t_0 - i\beta | \varphi(\vec{x}); t_0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} dt \int d^3\vec{x} [\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi)] \right\}. \quad (4.8)$$

En esta expresión  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización, la integral sobre campos clásicos está restringida a campos que empiezan a  $t = t_0$  y terminan a  $t = t_0 - i\beta$  en  $\varphi(\vec{x})$ , la integración sobre los momentos no está restringida, y el punto significa derivada parcial con respecto al tiempo i.e.,  $\dot{\varphi} \equiv \partial\varphi/\partial t$ . Efectuando una rotación de Wick  $it = \tau$ , tomando  $t_0 = 0$  y llevando (4.8) a (4.7) obtenemos

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi \int_{\text{periodicidad}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} [i\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi)] \right\}, \quad (4.9)$$

donde ahora el punto significa derivada parcial con respecto a  $\tau$ ,  $\dot{\varphi} \equiv \partial\varphi/\partial\tau$ , y los campos  $\varphi$  sobre los que se integran deben ser periódicos,

$$\varphi(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}, \beta). \quad (4.10)$$

En los casos usuales  $\mathcal{H}$  es una función cuadrática de los momentos, por lo que la integral sobre  $\mathcal{D}\pi$  de (4.8) es gaussiana y se puede efectuar. El resultado sustituye el momento  $\pi$  del inte-

grando por su valor en el punto estacionario, dado por

$$i\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}(n, \varphi)}{\partial n}.$$

En caso de que el coeficiente de  $n^2$  en  $\mathcal{H}$  sea una función de  $\varphi$ , la integración sobre  $\mathcal{D}n$  añade, además, un término adicional. Ahora bien, éste es el procedimiento usual para pasar de la densidad hamiltoniana a la densidad lagrangiana efectiva, pero multiplicando las derivadas con respecto a  $\tau$  por  $i$ , (lo que proviene de la rotación de Wick efectuada). Así pues,

$$Z = \mathcal{N}(\beta) \int_{\text{periodicidad}} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{efec}}(\varphi, i\dot{\varphi}) \right\}. \quad (4.11)$$

La constante  $\mathcal{N}(\beta)$  es distinta de la constante  $\mathcal{N}$  que aparece en (4.9) y depende de  $\beta$ , la cual dependencia tiene su origen en la integración sobre  $\mathcal{D}n$  que hemos realizado. En cada caso concreto  $\mathcal{N}(\beta)$  se puede determinar; por ejemplo, Bernard [2] ha demostrado que para bosones y fotones está dada por

$$\ln \mathcal{N}(\beta) = -(\ln \beta) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.$$

De la misma forma que a temperatura nula, a partir de (4.11) se obtienen las reglas de Feynman. Los propagadores estarán determinados por las partes cuadráticas de  $\mathcal{L}_{\text{efec}}$  y los vértices por las no cuadráticas. Sólo hay dos diferencias. La primera es que, al estar en el espacio-tiempo euclídeo, la prescripción  $+i\epsilon$  para los denominadores de los propagadores no es necesaria. La segunda es que el requisito de periodicidad de los campos en el tiempo cambia las integrales sobre energías en sumas. Para bosones esto

significa reemplazar la energía  $k_0$  por  $2\pi n/\beta$  y sumar sobre los enteros  $n$ . Para fermiones, en lugar de (4.10), se requiere antiperiodicidad,

$$\psi(\vec{x}, 0) = -\psi(\vec{x}, \beta),$$

lo que implica sustituir  $k_0$  por  $(2n+1)\pi/\beta$  y sumar en  $n$  en vez de integrar sobre  $k_0$ .

Como ejemplo de lo anterior vamos a hallar las reglas de Feynman para  $\lambda\phi^4$ . A partir de la densidad lagrangiana usual

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 - m^2\phi^2 \right] - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

construimos (4.11):

$$Z = \mathcal{N}(\beta) \int \mathcal{D}\psi \exp(S_0 + S_1),$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \varphi,$$

$$S_1 = -\frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x} \varphi^4.$$

La periodicidad de  $\varphi$  en el intervalo  $0 \leq \tau \leq \beta$  nos permite escribir

$$\varphi(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\omega_n^+ \tau} e^{i\vec{k}\vec{x}} \varphi_n(\vec{k}), \quad \omega_n^+ \equiv \frac{2\pi n}{\beta},$$

que, junto con

$$\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_m^+ - \omega_n^+)\tau} = \beta \delta_{mn},$$

implica que

$$S_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [(\omega_n^+)^2 + k^2 + m^2] \varphi_n(k) \varphi_n(-k).$$

Si por  $\langle , \rangle$  denotamos el producto escalar en nuestro espacio de funciones periódicas,  $S_0 = -\frac{1}{2} \langle \varphi, D\varphi \rangle$  con  $D = (\omega_n^+)^2 + k^2 + m^2$  en la representación de momentos. El propagador de Feynman  $\Delta_F$  es la inversa de D:

$$\Delta_F(\omega_n^+, k) = \frac{1}{(\omega_n^+)^2 + k^2 + m^2},$$

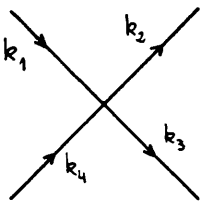
que en la representación de posiciones toma la forma

$$\Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega_n^+(\tau-\tau') + i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{(\omega_n^+)^2 + k^2 + m^2}.$$

Para calcular el vértice se desarrolla la exponencial de  $S_1$  en serie de potencias de  $S_1$  y se usa la fórmula funcional

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \varphi, D\varphi \rangle \right] \varphi(\vec{x}_1, \tau_1) \varphi(\vec{x}_2, \tau_2) \varphi(\vec{x}_3, \tau_3) \varphi(\vec{x}_4, \tau_4) \dots = \\ & = (\text{const}) (\det D)^{-1/2} \varphi(\vec{x}_1, \tau_1) \varphi(\vec{x}_2, \tau_2) \varphi''(\vec{x}_3, \tau_3) \varphi''(\vec{x}_4, \tau_4) + \text{permutaciones}, \end{aligned}$$

donde los campos con el mismo número de puntos se encuentran contraídos y tal contracción está dada por el propagador  $\Delta_F$ , i.e.,  $\varphi(\vec{x}_1, \tau_1) \varphi(\vec{x}_2, \tau_2) = \Delta_F(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \tau_1 - \tau_2)$ . Así llegamos al siguiente vértice



$$- \lambda (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_4 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \beta \delta_{\omega_{m_1} + \omega_{m_4}, \omega_{m_2} + \omega_{m_3}}$$

que conserva las energías discretas y los trimomentos.

Las anteriores reglas de Feynman, repetimos, son válidas para un inercial con respecto al cual el fluido se encuentra en reposo, esto es, para  $u^\nu = (1, \vec{0})$ . Veamos cuál es su forma para una  $u^\nu$  arbitraria, ecuación (4.1). Se trata de evaluar (4.2) con  $\mu_A = 0$ . Eligiendo el eje de la variable muda  $\sigma_0$  de la integral del exponente paralelo a  $u^\nu$  se puede repetir el proceso de Bernard. De esta forma llegamos a (4.9) pero con  $\tau^* = ix_0^*$  y  $\vec{x}^*$  en lugar de  $\tau$  y  $\vec{x}$ , donde  $x^{*\nu}$  son las coordenadas en el referencial con respecto al cual el fluido se mueve con velocidad  $\vec{v}$ . Ahora la condición de periodicidad (4.10) es válida para las variables  $\tau^*$  y  $\vec{x}^*$ . Esta condición de contorno da la misma discretización para los valores de la energía que en el caso  $u^\nu = (1, \vec{0})$ . Para el caso  $\lambda \phi^4$  obtenemos

$$\Delta_F^*(\omega_n^*, \vec{k}^*) = \frac{1}{(\omega_n^*)^2 + \vec{k}^{*2} + m^2},$$



$$\Delta_F^*(\vec{x}^* - \vec{x}'^*, \tau^* - \tau'^*) = \frac{1}{i} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega_m^*(\tau^* - \tau'^*) + i\vec{k}^*(\vec{x}^* - \vec{x}'^*)}}{(\omega_m^*)^2 + \vec{k}^{*2} + m^2}.$$

#### 4.4 REGLAS DE FEYNMAN A LA BERNARD (II): TEORIAS GAUGE

El problema con las teorías gauge surge porque  $\text{tr}[\exp(-\beta H)]$  no tiene sentido físico en todos los gauges. La razón es que en algunos aparecen partículas espúreas que no existen en la naturaleza y la traza de  $\text{tr}[\exp(-\beta H)]$  suma sobre estados físicos. Píense, por ejemplo, en el gauge de Lorentz y en los fotones escalar y longitudinal de la QED. Esto nos dice que  $Z$  se debe definir como  $\text{tr}[\exp(-\beta H)]$  solamente en gauges físicos, es decir, en aquellos que tengan el número correcto de grados de libertad. Lo que sí que se puede hacer es calcular esta  $Z$  verdadera usando gauges no físicos. Veamos cómo.

La macrofunción de partición verdadera está dada por [2]

$$Z = [\mathcal{N}(\beta)]^n \int_{(\text{anti})\text{periodicidad}} \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi \prod_b \delta[F^b] \quad (4.12)$$

$$\times \det\left(\frac{\delta F^b}{\delta \omega^c}\right) \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(A, \varphi, i\dot{A}, i\dot{\varphi})\right\}$$

con  $n$  el número total de partículas físicas con estados de polarización distintos,  $F^b = 0$  las condiciones de gauge y  $w^c$  las funciones que parametrizan la transformación bajo la que la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  es invariante. Como  $\mathcal{L}$  y la métrica de (4.12) son invariantes gauge, la integral (4.12) también lo es. Veamos qué quiere decir esto último. Las condiciones gauge lo que hacen es elegirnos un representante de entre todos aquellos campos que están relacionados mediante transformaciones gauge para que así la integral esté extendida a campos físicamente distintos. Para ello  $F^b = 0$  fija una superficie que corta a la órbita formada por todos los campos relacionados mediante transformaciones gauge en un único punto, que es el que tomamos como representante. La invariancia consiste en que el resultado es independiente del representante elegido, o, lo que es lo mismo, de las condiciones de gauge. En particular, se pueden elegir unas condiciones de gauge no físicas. De esta forma calculamos la  $Z$  física que no tiene por qué coincidir con la traza de  $\exp(-\beta H)$  en el gauge elegido.

Usando (4.12) con condiciones  $F^b = 0$  arbitrarias calculamos la  $Z$  física y, a partir de ésta, procediendo de la misma forma que para teorías sin invariancia gauge hallamos las reglas de Feynman. Como ejemplo vamos a ver el caso de la QED. Tomando

$$F = i\partial_\tau A^0(\vec{x}, \tau) - \vec{\nabla} \vec{A}(\vec{x}, \tau) - f(\vec{x}, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \beta \quad (4.13)$$

con  $f(\vec{x}, \tau)$  una función arbitraria, tenemos

$$\det\left(\frac{\delta F}{\delta w}\right) = \det(\partial_\tau^2 + \vec{\nabla}^2) = \exp\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[(w_n^+)^2 + k^2]\right\}, \quad (4.14)$$

donde hemos usado que el determinante está definido sobre el espacio de funciones periódicas. Llevando (4.13) y (4.14) a (4.12),

multiplicando por la derecha por

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\vec{x} f^2(\vec{x}, \tau) \right\},$$

integrando sobre  $\mathcal{D}_f$  y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \not{\partial} - m - e \not{A} \right) \psi, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$


con  $\partial_0 = i\partial_t$  y  $A_0 = iA_0^{\text{Minkowski}}$ , resulta

$$Z_{\text{QED}} = [\mathcal{N}(\beta)]^2 \det(\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2) \int_{(\text{anti})\text{periodicidad}} \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ \int_0^\beta dx \int d^3x \left[ \mathcal{L}_{\text{QED}} - \frac{i}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] \right\}.$$

Las condiciones de periodicidad son para el campo A y las de anti-periodicidad para  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ . A partir de esta Z, de la misma manera que para el caso  $\lambda\phi^4$  se obtienen las siguientes reglas de Feynman

$$\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \quad S_F(\omega_m^-, \vec{p}) = \frac{1}{p - m}, \quad p^\nu = (i\omega_m^-, \vec{p}), \quad \omega_m^- = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$$

$$\text{wavy line } k \quad D_F^{\nu\mu}(\omega_m^+, \vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \left[ g^{\nu\mu} + (a-1) \frac{k^\nu k^\mu}{k^2} \right], \quad k^\nu = (i\omega_m^+, \vec{k}),$$



$$-e\gamma^\nu (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}) \beta \delta_{\vec{m}_p + \vec{m}_k, \vec{m}_q}$$

En general, para cualquier teoría las reglas de Feynman a temperatura finita son las mismas que a temperatura nula con las siguientes sustituciones:

$$k_0 \rightarrow i\omega_n^+ + \mu \text{ para bosones, } k_0 \rightarrow i\omega_n^- + \mu \text{ para fermiones,}$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + \dots) \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots) \frac{1}{i} \rho \delta_{\omega_{n_1}^+ + \dots + \omega_{n_2}^- + \dots},$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{i}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3},$$

con  $\mu$  el potencial químico. Esto se sigue de que la finitud del intervalo temporal implica la discretización de energías. Estas reglas de Feynman, lo recordamos una vez más, son válidas para un inercial con respecto al cual el fluido se encuentra en reposo. En un referencial con respecto al cual el fluido se mueve con velocidad  $\vec{v}$  las reglas son las mismas sustituyendo  $\vec{k}$  por el trimomento  $\vec{k}^*$  en este inercial.

Nótese que en definitiva hemos hallado las reglas de Feynman acudiendo a un desarrollo diagramático para la macrofunción de partición física  $Z$ . Ahora bien, este mismo desarrollo se podría haber conseguido de una forma ligeramente distinta que pasa por los siguientes puntos. Primero: a partir de  $Z$  se construye una funcional generadora  $Z[J, J']$  añadiendo unos términos fuentes  $J\phi$  y  $J'A$  a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Segundo: en la parte de interacción de  $\mathcal{L}$  se hacen las sustituciones

$$\phi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \quad A \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J'}.$$

Y tercero: se desarrolla en serie de potencias del exponente la exponencial

$$\exp \left\{ \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{interac.} \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J'} \right] \right\}$$

y se toma  $J = J' = 0$ . Esta segunda forma de proceder presenta la ventaja de que las funciones de Green se pueden obtener directamente a partir de  $Z[J, J']$  mediante derivación logarítmica con respecto a  $J$  y  $J'$ .

Por último, decir que al formalismo de Bernard se le conoce con el nombre de "a tiempo imaginario" debido a la rotación de Wick que efectúa.

#### 4.5 PROPAGADORES DE DOLAN Y JACKIW

Las reglas de Feynman a tiempo imaginario obtenidas por Bernard presentan el inconveniente de que a la hora de usarlas en cálculos concretos aparecen unas sumas bastante incómodas. Dolan y Jackiw [4] han propuesto unas reglas alternativas en las que las energías no se discretizan y las sumas se convierten en integrales. En esta sección y siguiendo su trabajo original [4] vamos a encontrar tales reglas.

Tratemos primeramente el propagador de los bosones. En el intervalo temporal  $0 \leq \tau \leq \beta$  se puede definir una ordenación temporal  $\mathcal{T}$  como

$$\mathcal{T} [\varphi(\vec{x}, \tau) \varphi(\vec{x}', \tau')] = \theta(\tau - \tau') \varphi(\vec{x}, \tau) \varphi(\vec{x}', \tau') + \theta(\tau' - \tau) \varphi(\vec{x}', \tau') \varphi(\vec{x}, \tau). \quad (4.15)$$

A continuación definimos  $\Delta_F^<$  y  $\Delta_F^>$  mediante

$$\Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') = \theta(\tau-\tau') \Delta_F^>(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') + \theta(\tau'-\tau) \Delta_F^<(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau'), \quad (4.16)$$

los cuales, merced a la condición de periodicidad (4.10), satisfacen

$$\begin{aligned} \Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') \Big|_{\tau=0} &= \Delta_F^<(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') \Big|_{\tau=0} = \\ &= \Delta_F^>(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') \Big|_{\tau=\beta} = \Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') \Big|_{\tau=\beta} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Haciendo el cambio  $i x_0 = \tau$ , definiendo las transformadas de Fourier de  $\Delta_F^<(x)$  como

$$\bar{\Delta}_F^<(k) = \int d^4x e^{ikx} \Delta_F^<(x), \quad (4.18)$$

y usando (4.17) tenemos

$$\bar{\Delta}_F^<(k) = \int d^4x e^{ikx} \Delta_F^>(\vec{x}, x_0 - i\beta) = e^{-\beta k_0} \bar{\Delta}_F^>(k),$$

la cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_F^>(k) &= [1 + n_B(k_0)] \rho(k), \quad \bar{\Delta}_F^<(k) = n_B(k_0) \rho(k) \\ \rho(k) &= \bar{\Delta}_F^>(k) - \bar{\Delta}_F^<(k), \quad n_B(k_0) = (e^{\beta k_0} - 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La función  $\rho(k)$  es nuestra incógnita y determina  $\bar{\Delta}_F(k)$  ya que usando la representación

$$\theta(x_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0 + i\varepsilon}$$

y (4.19) llegamos a

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_F(k) &= \int d^4x e^{ikx} [\theta(x_0) \Delta_F^>(x) + \theta(-x_0) \Delta_F^<(x)] = \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0 + i\varepsilon} + n_B(k_0) \rho(k). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para calcular  $\rho(k)$  usamos el propagador de Bernard  $\Delta_F(\omega_n^+, \vec{k})$ , el cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \Delta_F(\omega_n^+, \vec{k}) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n^+ \tau} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \Delta_F(x) = \\ &= i \int_0^{-i\beta} dx_0 e^{-\omega_n^+ x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 x_0} \bar{\Delta}_F^>(k) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1 - e^{-\beta k_0}}{i\omega_n^+ - k_0} \bar{\Delta}_F^>(k) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k)}{i\omega_n^+ - k_0}, \end{aligned}$$

que nos dice que debemos extender  $\Delta_F(\omega_n^+, \vec{k})$  a una función continua  $\Delta_F(-ik_0, k)$ , de manera que

$$\rho(k) = -i [\Delta_F(-ik_0 + \varepsilon, \vec{k}) - \Delta_F(-ik_0 - \varepsilon, \vec{k})] = 2\pi \delta(k^2 - m^2) \text{signo}(k_0).$$

Llevando  $\rho(k)$  a (4.20) resulta

$$\bar{\Delta}_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi \delta(k^2 - m^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \quad (4.21)$$

que es el propagador de Dolan y Jackiw en la representación de momentos.

Para fermiones, (4.15)-(4.17) se han de sustituir por

$$\mathcal{T}[\psi(\vec{x}, \tau) \bar{\psi}(\vec{x}', \tau')] = \theta(\tau - \tau') \psi(\vec{x}, \tau) \bar{\psi}(\vec{x}', \tau') - \theta(\tau' - \tau) \psi(\vec{x}', \tau') \bar{\psi}(\vec{x}, \tau),$$

$$S_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \theta(\tau - \tau') S_F^>(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') - \theta(\tau' - \tau) S_F^<(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau'),$$

$$\begin{aligned} S_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') \Big|_{\tau=0} &= S_F^<(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') \Big|_{\tau=0} = \\ &= -S_F^>(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') \Big|_{\tau=\beta} = -S_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') \Big|_{\tau=\beta}. \end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma que para el caso bosónico se llega al propagador



$$\bar{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} - \frac{2\pi(\not{p} + m)\delta(p^2 - m^2)}{e^{\beta|p_0|} + 1} . \quad (4.22)$$

Los vértices son los mismos que a temperatura cero ya que  $k^0$  puede tomar valores arbitrarios sobre el continuo.

Obsérvese que lo que hacen Dolan y Jackiw es prolongar analíticamente los propagadores de Bernard pasando de valores discretos imaginarios puros a valores arbitrarios reales de la variable  $k^0$ . Para ello usan el método de Fetter y Walecka [7]. Los mismos Dolan y Jackiw se dieron cuenta de que el uso de sus propagadores en cálculos perturbativos conducía a la aparición de potencias  $\delta^N(k^2 - m^2)$  con  $N \geq 2$ . Esto sugiere la búsqueda de un formalismo que no discretice la energía y que no presente estas  $\delta^N(k^2 - m^2)$  ( $N \geq 2$ ). En los últimos años se ha propuesto la llamada "Thermo-Field Dynamics", que estudiaremos en la siguiente sección. No obstante hemos de decir que el uso de los propagadores de Dolan y Jackiw ha sido útil en unos primeros cálculos.

#### 4.6 "THERMO-FIELD DYNAMICS" (TFD)

Takahashi y Umezawa [12] propusieron un formalismo a tiempos reales alternativo al de Bernard que dieron en llamar "Thermo-Field Dynamics" o, abreviadamente, TFD. Posteriormente, Matsumoto [35] lo desarrolló y, junto con Tachicki y Umezawa lo aplicó a problemas de Física del Estado Sólido [14]. Muchos son los autores que han aplicado la TFD a la Física de Partículas, especialmente a bosones interaccionando mediante potenciales  $\phi^3$  y  $\phi^4$ , todos ellos del grupo de Matsumoto y Umezawa, [15,16]. Por ejemplo, Fujimoto et al. [36] han probado que para una interacción  $\phi^3$  las divergencias del tipo  $\delta^N(k^2 - m^2)$  con  $N \geq 2$ , que aparecen con el formalismo de Dolan-

Jackiw y que no tienen razón de ser, se cancelan. En esta sección vamos a ver brevemente en qué consiste la TFD y cuáles son las reglas de Feynman a las que da lugar.

Nos situamos en el referencial en reposo, i.e.,  $u^\nu = (1, \vec{0})$ , y suponemos que los potenciales químicos invariantes Lorentz son cero, de forma que (4.2) se reduce a (4.3). Vamos a centrarnos por sencillez en el caso de teorías sin invariancia gauge y a considerar que en nuestra teoría sólo interviene un campo  $\phi$ . Vamos a evaluar la funcional generadora

$$Z[J] = \text{tr} \left[ \exp \{ -\beta (H + J\phi) \} \right],$$

a partir de la cual se obtienen las funciones de Green.

Lo primero que hacemos es extender el soporte de las variables del campo a todo el plano complejo de tiempos mediante una generalización de las traslaciones temporales (4.4) y (4.5)

$$A(\vec{x}, t+z) = e^{iH_z} A(\vec{x}, t) e^{-iH_z}, \quad A = \phi, \Pi,$$

$$|a(\vec{x}); t+z\rangle = e^{iH_z} |a(\vec{x}); t\rangle, \quad a = \phi, \pi,$$

$$\langle a(\vec{x}); t+z| = e^{-iH_z} \langle a(\vec{x}); t|, \quad a = \phi, \pi.$$

Para cada tiempo  $t+z$  se tiene

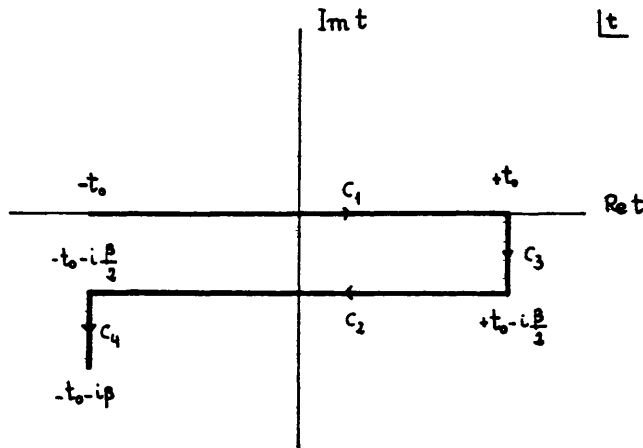
$$\mathbb{1} = \int \mathcal{D}\phi |a(\vec{x}); t+z\rangle \langle a(\vec{x}); t+z|, \quad a = \phi, \pi. \quad (4.23)$$

Entonces

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi(\vec{x}); \tau_0 - i\beta | \varphi(\vec{x}); \tau_0 \rangle, \quad (4.24)$$

donde  $\tau_0$  es un punto arbitrario del plano complejo y el hamiltoniano que gobierna el sistema es  $H + J\phi$ .

De  $\tau_0$  a  $\tau_0 - i\beta$  se puede ir por muchos caminos. El formalismo de Bernard de la sección 4.3 es aquel que toma  $\tau_0 = 0$  y va desde 0 hasta  $-i\beta$  por el eje imaginario. Nosotros, siguiendo la TFD, escogemos el camino de la figura. Definimos un operador ordenación



temporal  $T_c$  como aquel que ordena los operadores según los tiempos de sus argumentos aparezcan antes o después a lo largo del contorno  $C$  en el sentido marcado por las flechas, de forma que los más cercanos al extremo  $-t_0$  aparecerán a la derecha y los más cercanos a  $-t_0 - i\beta$  a la izquierda. Esta ordenación respeta la dada en la sección 4.5. Sobre el contorno  $C$  definimos unas funciones  $\delta_c(\tau - \tau')$  y  $\theta_c(\tau - \tau')$ ,

$$\int_C d\tau \delta_C(\tau-\tau') f(\tau) = f(\tau') \quad , \quad \theta_C(\tau-\tau') = \int_C^\tau d\tau'' \delta_C(\tau''-\tau') \quad , \quad (4.25)$$

y extendemos la derivada funcional como

$$\frac{\delta J(\vec{x}', \tau')}{\delta J(\vec{x}, \tau)} = \delta_C(\tau-\tau') \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \quad . \quad (4.26)$$

Introduciendo en (4.24) tres veces la identidad (4.23) a tiempos  $t_0$ ,  $t_0 - i\frac{\beta}{2}$  y  $-t_0 - i\frac{\beta}{2}$  tenemos

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_C d\tau \int d^3\vec{x} [\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H} + J\varphi] \right\} \quad , \quad (4.27)$$

$$\varphi(\vec{x}, -t_0) = \varphi(\vec{x}, -t_0 - i\beta) \quad , \quad (4.28)$$

donde  $\dot{\varphi}$  indica derivada de  $\varphi$  en la dirección tangencial a C en el plano complejo del tiempo y (4.28) proviene de la traza que define (4.24).

La elección del contorno que hemos hecho ha sido totalmente arbitraria. Cabe preguntarse si cualquier otro contorno hubiese valido. La respuesta es afirmativa siempre y cuando se verifiquen ciertas condiciones. Veamos cuáles. La primera es que sus puntos final e inicial deben estar separados por  $-i\beta$ . La segunda es que el contorno tiene que pasar por los puntos que aparecen como argumentos de las funciones de Green que queremos calcular. En este sentido cabe decir que la elección realizada es muy buena pues, al hacer  $t_0 \rightarrow \infty$ , el contorno abarca todo el eje real de tiempos. Hay una tercera condición y es que los argumentos temporales de las funciones de Green estén dentro del dominio de analiticidad de las

mismas. Este dominio está formado por aquellos  $\tau$  tales que cuando uno de ellos  $\tau'$  precede según  $T_C$  (gráficamente sucede) a otro  $\tau''$  se verifica que  $-\beta \leq \text{Im}(\tau' - \tau'') \leq 0$  [37]. Esta condición de analiticidad garantiza que la parte real del exponente de (4.27) está acotada superiormente y se satisface siempre que el contorno no vaya hacia arriba.

En los casos usuales,  $\mathcal{H}$  es una función cuadrática de  $n$ , por lo que la integral sobre  $\mathcal{H}n$  de (4.27) se puede efectuar resultando

$$Z[J] = \mathcal{N}(\beta) \int \mathcal{D}_C \varphi \exp \left\{ i \int_C d\tau \int d^3\vec{x} [\mathcal{L}_{\text{efec.}}(\varphi) + J\varphi] \right\}, \quad (4.29)$$

donde  $\mathcal{N}(\beta)$  es una constante de normalización que depende de  $\beta$  y de la que no nos vamos a preocupar.

Para el caso particular

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_C^\nu \varphi)(\partial_\nu^C \varphi) - m^2 \varphi^2] - V(\varphi), \quad (4.30)$$

teniendo en cuenta (4.25) y (4.26), (4.29) se puede escribir

$$\begin{aligned} Z[J] = & \mathcal{N}(\beta) \exp \left\{ -i \int_C d\tau \int d^3\vec{x} V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_C d\tau d\tau' \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' J(\vec{x}, \tau) \Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') J(\vec{x}', \tau') \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde  $\Delta_F$  es el inverso de  $-\square_c - m^2$ :

$$(-\square_c - m^2) \Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \delta_c(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (4.32)$$

$$\Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau' - i\beta) , \quad (4.33)$$

la última de las cuales se sigue de la condición de periodicidad (4.28). La única solución de (4.32)-(4.33) es

$$\begin{aligned} \Delta_F(E, \tau - \tau') = & \frac{-i}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \left\{ \left[ e^{-iE(\tau - \tau')} + e^{-\beta E + iE(\tau - \tau')} \right] \times \right. \\ & \left. + \theta_c(\tau - \tau') + \left[ e^{iE(\tau - \tau')} + e^{-\beta E - iE(\tau - \tau')} \right] \theta_c(\tau' - \tau) \right\} , \\ E = & \sqrt{k^2 + m^2} , \end{aligned}$$

donde hemos tomado transformadas de Fourier para la parte espacial.

Tomemos el límite  $t_0 \rightarrow \infty$ . El lema de Riemann nos dice que en tales condiciones  $\Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau_{1,2} - \tau_{3,4}) \rightarrow 0$ , es decir, que el propagador no conecta tiempos de los segmentos horizontales  $C_1, C_2$  con tiempos de los verticales  $C_3$  y  $C_4$ , por lo que  $Z[J]$  se puede factorizar

$$Z[J] = Z[J_1, J_2] Z[J_3, J_4] ,$$

donde cada una de estas  $Z$  viene dada por (4.31) particularizando  $C$  a  $C_1 C_2$  y  $C_3 C_4$ . Ahora bien, nuestro interés físico se centra en funciones de Green cuyos argumentos temporales sean reales, de forma que la parte relevante de  $Z[J]$  es  $Z[J_1, J_2]$ . La contribución de

$Z[J_3, J_4]$  la absorbemos en la constante  $\mathcal{N}(\beta)$  y nos queda

$$Z[J] = Z[J_1, J_2] .$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \int_{C_1, C_2} d\tau d\tau' \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' J(\vec{x}, \tau) \Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', \tau-\tau') J(\vec{x}', \tau') = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_{a,b=1,2} J_a(\vec{x}, t) \Delta_{ab}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') J_b(\vec{x}', t') , \end{aligned}$$

donde

$$J_1(\vec{x}, t) = J(\vec{x}, t) \quad , \quad J_2(\vec{x}, t) = J(\vec{x}, t - i\frac{\beta}{2}) \quad ,$$

$$\Delta_{11}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', t-t') \quad , \quad \Delta_{22}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \Delta_F(\vec{x}-\vec{x}', t-t') \quad ,$$

$$\Delta_{12}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -\Delta_F^<(\vec{x}-\vec{x}', t-t' + i\frac{\beta}{2}) \quad , \quad \Delta_{21}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -\Delta_F^>(\vec{x}-\vec{x}', t-t' - i\frac{\beta}{2}) \quad ,$$

nos queda

$$\begin{aligned} Z[J_1, J_2] = \mathcal{N}(\beta) \exp \left\{ -i \int d^4x \left( V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1} \right] - V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2} \right] \right) \right\} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \sum_{a,b=1,2} J_a(x) \Delta_{ab}(x-y) J_b(y) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \mathcal{N}(\beta) \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \varphi_a \Delta_{ab}^{-1} \varphi_b - v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + \sum_{a=1,2} J_a \varphi_a \right] \right\} , \quad (4.34)$$

donde ya hemos usado la notación estándar  $x_0 = t$ .

Así pues, (4.34) es una expresión para  $\text{tr} [\exp \{-\beta(H + J\phi)\}]$  cuando esta última se utiliza para generar reglas de Feynman a tiempos reales. Por tanto, las funciones de Green vendrán dadas por

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \ln Z[J_1, J_2]}{\delta J_1(x_1) \dots \delta J_1(x_n)} \Big|_{J_1=J_2=0} .$$

Obsérvese que al estar calculando funciones de Green con argumentos temporales reales sólo se puede derivar con respecto a  $J_1$ . En particular, el propagador  $\Delta_F$  en la representación de momentos está dado por

$$(i\Delta_{ab})(k) = (U^B) \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} (U^B) , \quad (4.35)$$

con

$$(U^B) = \begin{pmatrix} \cosh \theta_B(\beta) & \sinh \theta_B(\beta) \\ \sinh \theta_B(\beta) & \cosh \theta_B(\beta) \end{pmatrix} , \quad (4.36)$$

$$\sinh^2 \theta_B(\beta) = \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} .$$



Efectuando los productos de (4.35) se obtiene

$$(i\Delta_{ab})(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi \delta(k^2 - m^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} & -\frac{2\pi e^{\beta|k_0|/2} \delta(k^2 - m^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \\ -\frac{2\pi e^{\beta|k_0|/2} \delta(k^2 - m^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} + \frac{2\pi \delta(k^2 - m^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Vemos, pues, que los propagadores adquieren una estructura matricial cuyo elemento 11 es el propagador (4.21) de Dolan y Jackiw.

Ahora hay dos tipos de campos, el 1 y el 2, de los cuales solamente el 1 puede aparecer como línea externa de un diagrama, pues es el único asociado a tiempos reales. También hay dos tipos de vértices 1 y 2, que, de acuerdo con (4.34), son iguales salvo un signo, por lo que la estructura topológica y combinatoria para ambos es la misma y no cambia con respecto a la de temperatura nula. Los campos 1 y 2 interactúan entre sí mediante los elementos no diagonales del propagador. Nótese que en límite  $\beta \rightarrow \infty$  (temperatura nula) los elementos no diagonales se anulan, desacoplándose así los campos 1 y 2 y obteniendo para cada uno la funcional generadora a temperatura cero.

Para el caso de fermiones se procede análogamente [15]. La única diferencia es que en lugar de (4.28) se tiene una condición de antiperiodicidad.

Aunque en capítulos posteriores veremos detenidamente cómo se utilizan las reglas de Feynman de la TFD, vamos a estudiar aquí un pequeño ejemplo [37]. Consideremos una teoría libre descrita por la densidad lagrangiana (4.30) con una perturbación  $V(\varphi)$

donde  $\tau_{aa}$  son los elementos diagonales de la matriz

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.29)$$

Las reglas de (anti)conmutación que verifican los operadores creación y destrucción que aparecen en los dobletes térmicos son la generalización al continuo de (5.2), (5.6), (5.15) y (5.16). Por ejemplo, en lugar de  $[a, a^+] = 1$  tendremos

$$[a(k), a^\dagger(k')] \delta(k^2 - M^2) \theta(ku) \delta(k'^2 - M^2) \theta(k'u) = (2\pi)^3 \delta^{(4)}(k - k') \delta(k^2 - M^2) \theta(ku) .$$

Lo mismo cabe decir con respecto a las ecuaciones (5.10)-(5.13) y (5.20)-(5.23), donde ahora

$$\cos^2 \theta_B(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta(|ku| - \mu_B)}} , \quad \cos^2 \theta_F(\beta) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(|ku| - \mu_F)}} .$$

Entonces las reglas de (anti)conmutación entre los campos son

$$[\phi_a(x), \pi_b(y)] \delta(xu - yu) = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x - y) , \quad (5.30.a)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} \delta(xu - yu) = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x - y) , \quad (5.30.b)$$

$$\text{otros (anti)conmutadores} = 0 . \quad (5.30.c)$$

El producto cronológico se define en la forma usual pero sustituyendo el tiempo  $x^0$  por nuestro tiempo covariante  $x_u$ :

$$\begin{aligned} T[A_1(x_1) \dots A_N(x_N)] &= \sum_P (\pm 1)^{\xi(P)} \theta(x_1(P)u, \dots, x_N(P)u) \times \\ &\times A_1(x_1(P)) \dots A_N(x_N(P)) , \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde la suma está extendida a todas las permutaciones, el signo positivo es para campos que satisfacen reglas de conmutación, el negativo para los que verifican reglas de anticonmutación,  $\xi(P)$  es el orden de la permutación  $P$  y la función  $\theta$  impone la condición  $x_1(P)u \geq \dots \geq x_N(P)u$ .

Los propagadores están dados por los valores esperados de los productos cronológicos de los dobletes térmicos libres en el estado  $|0(\beta)\rangle$ :

Bosón:

$$\Delta_{ab}(x-y) = \langle 0(\beta) | T[\phi_a(x) \phi_b(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Delta_{ab}(k) , \quad (5.32.a)$$

$$(\Delta_{ab})(k) = (U^B) (\Delta_{ab}^0)(k) (U^B) , \quad (5.32.b)$$

$$(\Delta_{ab}^0)(k) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \frac{k^2 - m^2 + i\varepsilon}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} & \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix} , \quad (5.32.c)$$

con la matriz  $(U^B)$  dada por la primera de (4.36) y (4.40). También podemos escribir

$$\Delta_{ab}(k) = \Delta_{ab}^0(k) + \Delta_{ab}^B(k) , \quad (5.32.d)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^B(k) &= \Delta_{22}^B(k) = -\Delta_{12}^B(k) e^{-\beta(|k| - \mu_B)} = -\Delta_{21}^B(k) e^{-\beta(|k| - \mu_B)} = \\ &= 2\pi \delta(k^2 - M^2) n_B(k) , \end{aligned} \quad (5.32.e)$$

con

$$n_B(k) = \sinh^2 \theta_B(\beta) . \quad (5.32.f)$$

Obsérvese que el propagador bosónico satisface las ecuaciones

$$(\square + M^2) \Delta_{ab}(x-y) = -i\tau_{ab} \delta^{(4)}(x-y) , \quad (k^2 - M^2) \Delta_{ab}(k) = i\tau_{ab} . \quad (5.32.g)$$

Fermión:

$$S_{ab}(x-y) = \langle 0(\beta) | T[\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} S_{ab}(p) , \quad (5.33.a)$$

$$(S_{ab})(p) = (\not{p} + m)(U^F)(S_{ab}^0)(p)(U^F)^{-1} , \quad (5.33.b)$$

$$(S_{ab}^0)(p) = \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 m^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{i}{p^2 m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (5.33.c)$$

donde la matriz  $(U^F)$  está dada por

$$(U^F) = \begin{pmatrix} \cos \theta_F(p) & \sin \theta_F(p) \\ -\sin \theta_F(p) & \cos \theta_F(p) \end{pmatrix}, \quad (5.33.d)$$

$$\sin^2 \theta_F(p) = \frac{1}{e^{\beta(|p| - \mu_F)} + 1} = n_F(p).$$

También podemos escribir

$$S_{ab}(p) = (\not{p} + m) [S_{ab}^0(p) + S_{ab}^B(p)], \quad (5.33.e)$$

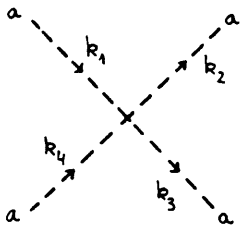
con

$$\begin{aligned} S_{11}^B(p) &= S_{22}^B(p) = S_{12}^B(p) e^{-\beta(|p| - \mu_F)} = S_{21}^B(p) e^{-\beta(|p| - \mu_F)} = \\ &= -2\pi \delta(p^2 - m^2) n_F(p). \end{aligned} \quad (5.33.f)$$

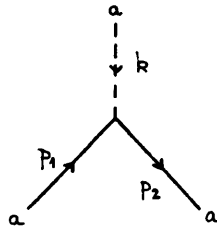
La ecuación que satisface el propagador fermiónico es

$$(i\not{\partial} - m)S_{ab}(x-y) = i\delta_{ab}\delta^{(4)}(x-y), \quad (\not{p} - m)S_{ab}(p) = i\delta_{ab}. \quad (5.33.g)$$

Los vértices son



$$-i\tau_{aa}\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_4-k_2-k_3)$$



$$-i\tau_{aa}g(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+k-p_2)$$

donde la línea discontinua es para bosones y la continua para fermiones.

Los campos 1 coinciden con los usuales y solamente éstos pueden aparecer como líneas externas de un diagrama pues son los que describen los grados de libertad físicos. Los grados de libertad tilde, asociados a los campos 2, se han introducido al pasar del espacio de Hilbert físico  $\mathcal{F}$  al  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ .

### 5.3 TFD (II): TEORIAS GAUGE

Nos situamos nuevamente en el inercial en reposo, i.e.,  $u^\nu = (1, \vec{0})$ . En una teoría gauge aparece una dificultad adicional y es que el espacio de estados  $\mathcal{F}$  que en principio se elige contiene estados de norma negativa y los valores medios estadísticos se deben calcular sobre el espacio de Hilbert físico  $\mathcal{F}_F$ :

$$\langle\langle A \rangle\rangle = Z_F^{-1} \text{tr}_F(e^{-\beta H_F} A_F) \quad , \quad Z_F = \text{tr}_F(e^{-\beta H_F}) \quad .$$

Ojima [13] ha probado que  $\langle\langle A \rangle\rangle$  se puede calcular sobre  $\mathcal{F}$  si en lugar de  $\beta H$  se considera  $\beta H \mp n Q_c$  donde  $Q_c$  es la carga de Faddeev-Popov

$$\langle\langle A \rangle\rangle = Z^{-1} \text{tr}(e^{-\beta H + n Q_c} A) , \quad Z = \text{tr}(e^{-\beta H + n Q_c}) ,$$

$$Q_c = i \int d^3x [\bar{\eta}_a (\partial^\mu \eta^a + g f^{abc} A^\mu_b \eta_c) - (\partial^\mu \bar{\eta}_a) \eta^a] ,$$

con  $\bar{\eta}^a$  y  $\eta^a$  los fantasmas Faddeev-Popov,  $f^{abc}$  las constantes de estructura de grupo de Lie que implementa la invariancia gauge,  $A^\mu$  el campo gauge y  $a, b, c$  yendo desde 1 hasta la dimensión del álgebra de Lie. Todavía más,

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle ,$$

donde la expresión que da el vacío y que se corresponde con (5.3) es

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2} \sum_{k,l=0}^{\infty} e^{-\beta E_k/2} e^{\pm i n N_k/2} \frac{|k\rangle \otimes |\tilde{l}\rangle}{\langle k|l\rangle} , \quad (5.34)$$

$$H|k\rangle = E_k|k\rangle , \quad iQ_c|k\rangle = N_k|k\rangle , \quad (5.35)$$

$$\langle \tilde{k} | \tilde{l} \rangle = \langle l | k \rangle \propto \delta_{N_{\tilde{k}} - N_l} . \quad (5.36)$$

La métrica en  $\mathcal{F}$  está indefinida, por lo que en (5.34) se divide por  $\langle k|1\rangle$ . Los estados  $|\tilde{l}\rangle$  están relacionados antilinealmente con los  $|k\rangle$ ,  $\langle \tilde{k}|\tilde{l}\rangle = \langle k|1\rangle^*$ , tal y como muestra (5.36).

Obsérvese que aun en el caso libre abeliano hay que considerar los fantasmas de Faddeev-Popov. La razón es que son precisamente los grados de libertad asociados a éstos los que cancelan los grados de libertad no físicos de los fotones escalar y longitudinal, y así obtener la función de partición de Planck. En este caso y para un solo modo de vibración de energía  $\epsilon$  tenemos

$$H = \epsilon \left[ \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger a_i - a_0 a_0 + (\bar{c}^\dagger c - c^\dagger \bar{c}) \right],$$

$$Q_c = i(\bar{c}^\dagger c + c^\dagger \bar{c}),$$

con reglas de (anti)conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_0, a_0^\dagger] = -1, \{\bar{c}, c^\dagger\} = -\{c, \bar{c}^\dagger\} = 1,$$

(5.37)

otros (anti)conmutadores = 0.

El vacío térmico está dado por

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)} |0\rangle,$$

(5.38)

$$G(\beta) = i\theta_\beta(\beta) \left[ \sum_{i=1}^3 (a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger - \tilde{a}_i a_i) - (a_0^\dagger \tilde{a}_0^\dagger - \tilde{a}_0 a_0) + (c^\dagger \bar{c}^\dagger + \bar{c} \bar{c} + \bar{c}^\dagger \tilde{c}^\dagger + \tilde{c} c) \right].$$



Los operadores con tilde para los fotones se definen de la misma forma que en el caso bosónico de la sección 5.2. Para definir los de los fantasmas se toman tildes de acuerdo con (5.25) en (5.37) y se usa el resultado como definición

$$\{\tilde{c}, \tilde{c}^+\} = -\{\tilde{c}, \tilde{c}^+\} = -1, \quad \{\tilde{c}, \tilde{c}^+\} = \{\tilde{c}, \tilde{c}^+\} = 0, \quad (5.39)$$

otros anticonmutadores = 0 .

La ecuación (5.39) proporciona la estructura métrica

$$\langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = -\langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = -1, \quad \langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = \langle \tilde{c} | \tilde{c} \rangle = 0,$$

otros productos escalares = 0 .

La transformación de Bogoliubov que sugiere (5.38) es

$$\begin{aligned} a_\lambda(\beta) &= a_\lambda \cosh \theta_\beta(\beta) - \tilde{a}_\lambda^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \\ \tilde{a}_\lambda(\beta) &= \tilde{a}_\lambda \cosh \theta_\beta(\beta) - a_\lambda^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \end{aligned} \quad , \quad \lambda = 0, 1, 2, 3,$$

$$\left. \begin{aligned} c(\beta) &= c \cosh \theta_\beta(\beta) \pm \tilde{c}^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \\ \tilde{c}(\beta) &= \tilde{c} \cosh \theta_\beta(\beta) \pm c^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \end{aligned} \right\} ,$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}(\beta) &= \bar{c} \cosh \theta_\beta(\beta) \mp \tilde{c}^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \\ \tilde{\bar{c}}(\beta) &= \tilde{\bar{c}} \cosh \theta_\beta(\beta) \mp \bar{c}^+ \sinh \theta_\beta(\beta) \end{aligned} \right\} ,$$

verificándose que

$$a_\lambda(\beta) |0(\beta)\rangle = \tilde{a}_\lambda(\beta) |0(\beta)\rangle = 0 ,$$

$$c(\beta) |0(\beta)\rangle = \tilde{c}(\beta) |0(\beta)\rangle = \bar{c}(\beta) |0(\beta)\rangle = \tilde{\bar{c}}(\beta) |0(\beta)\rangle = 0 .$$

Lo que se dijo en la sección anterior para teorías no gauge con respecto a la interacción es trasladable a teorías gauge. Como ejemplo vamos a analizar la QED. La densidad lagrangiana es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2} A_\nu A^\nu - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\nu A^\nu)^2 - \\ & + (\partial_\nu \bar{\eta})(\partial^\nu \eta) - \alpha \lambda^2 \bar{\eta} \eta + \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - m - e \not{A} \right) \psi , \end{aligned}$$

donde hemos dado una masa  $\lambda$  al fotón para evitar las divergencias infrarrojas. A partir de esta  $\mathcal{L}$  se obtiene la densidad lagrangiana térmica

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{\text{QED}} = & \sum_{a=1,2} \left\{ \tau_{aa} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a + \frac{\lambda^2}{2} A_\nu^a A_\nu^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\nu A_\nu^a)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. + (\partial_\nu \bar{\eta}_a)(\partial^\nu \eta_a) - \alpha \lambda^2 \bar{\eta}_a \eta_a \right] + \bar{\psi}_a \left( \frac{i}{2} \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} - m - e \not{A}_a \right) \psi_a \right\} , \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde  $\tau_{ab}$  está dada por (5.29), los dobletes térmicos  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}$  por (5.28), y

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_1^\nu(x) \\ A_2^\nu(x) \end{pmatrix} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - \lambda^2) \theta(k_0) \sum_{i=1}^3 \left[ \begin{pmatrix} a(k, i) \\ -\tilde{a}^+(k, i) \end{pmatrix} \varepsilon^\nu(k, i) e^{-ikx} + \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} a^+(k, i) \\ -\tilde{a}(k, i) \end{pmatrix} \varepsilon^{\nu*}(k, i) e^{ikx} \right] + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - \omega^2) \theta(k_0) \cdot \quad (5.41) \\
 &\quad + \frac{k^\nu}{\alpha \lambda^2} \left[ \begin{pmatrix} a(k, 0) \\ -\tilde{a}^+(k, 0) \end{pmatrix} e^{-ikx} + \begin{pmatrix} a^+(k, 0) \\ -\tilde{a}(k, 0) \end{pmatrix} e^{ikx} \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - \alpha \lambda^2) \theta(k_0) \left[ \begin{pmatrix} c(k) \\ \tilde{c}^+(k) \end{pmatrix} e^{-ikx} + \begin{pmatrix} c^+(k) \\ \tilde{c}(k) \end{pmatrix} e^{ikx} \right] , \quad (5.42.a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1(x) \\ \bar{\eta}_2(x) \end{pmatrix} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - \alpha \lambda^2) \theta(k_0) \left[ \begin{pmatrix} \bar{c}(k) \\ -\bar{\tilde{c}}^+(k) \end{pmatrix} e^{-ikx} + \begin{pmatrix} \bar{c}^+(k) \\ -\bar{\tilde{c}}(k) \end{pmatrix} e^{ikx} \right] . \quad (5.42.b)$$

Estos campos satisfacen

$$[A_a^\nu(x), \Pi_b^\tau(y)] \delta(x_\mu - y_\mu) = i \delta_{ab} \eta^{\nu\tau} \delta^{(4)}(x-y) , \quad (5.43.a)$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} \delta(x_\mu - y_\mu) = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y) , \quad (5.43.b)$$

$$\text{otros (anti)conmutadores} = 0 . \quad (5.43.c)$$

Los propagadores están dados por los valores esperados en  $|0(\beta)\rangle$  de los productos cronológicos de los dobletes térmicos libres:

Fermión:  $S_{ab}(x-y) = (5.33).$  (5.44)

Fotón:

$$D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) = \langle 0(\beta) | T[A_a^\nu(x) A_b^\tau(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{ab}^{\nu\tau}(k), \quad (5.45.a)$$

$$(D_{ab}^{\nu\tau})(k) = (U^B)(D_{ab}^{\nu\tau 0})(k)(U^B), \quad (5.45.b)$$

$$(D_{ab}^{\nu\tau 0})(k) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \left[ g^{\nu\tau} + (\alpha-1) \frac{k^\nu k^\tau}{k^2 - \alpha\lambda^2 + i\varepsilon} \right] & 0 \\ 0 & \frac{i}{k^2 - \lambda^2 - i\varepsilon} \left[ g^{\nu\tau} + (\alpha-1) \frac{k^\nu k^\tau}{k^2 - \alpha\lambda^2 - i\varepsilon} \right] \end{pmatrix}. \quad (5.45.c)$$

La matriz de factores termodinámicos ( $U^B$ ) está dada por

$$(U^B) = \begin{pmatrix} \cosh \theta_B(\beta) & \sinh \theta_B(\beta) \\ \sinh \theta_B(\beta) & \cosh \theta_B(\beta) \end{pmatrix}, \quad (5.45.d)$$

$$\sinh^2 \theta_B(\beta) = \frac{1}{e^{\beta|ku|} - 1} = n_B(k).$$

Otra forma de escribir el propagador es

$$D_{ab}^{\nu\tau}(k) = D_{ab}^{\nu\tau 0}(k) + D_{ab}^{\nu\tau \beta}(k), \quad (5.45.e)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{11}^{\nu\tau \beta}(k) &= D_{22}^{\nu\tau \beta}(k) = e^{-\beta|k\omega|/2} D_{21}^{\nu\tau \beta}(k) = e^{-\beta|k\omega|/2} D_{12}^{\nu\tau \beta}(k) = \\ &= -2\pi n_B(k) \left\{ g^{\nu\tau} \delta(k^2 - \lambda^2) + \frac{k^\nu k^\tau}{\lambda^2} [\delta(k^2 - \lambda^2) - \delta(k^2 - \lambda'^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.45.f)$$

El propagador de los fotones satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} [g_{\nu\rho}(\Box + \lambda^2) + (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\nu \partial_\rho] D_{ab}^{\rho\tau}(x-y) &= i\tau_{ab} g_\nu^\tau \delta^{(4)}(x-y), \\ [g_{\nu\rho}(k^2 - \lambda^2) + (1 - \frac{1}{\alpha}) k_\nu k_\rho] D_{ab}^{\rho\tau}(k) &= -i\tau_{ab} g_\nu^\tau. \end{aligned} \quad (5.45.g)$$

Fantasmas:

$$\mathcal{D}_{ab}(x-y) = \langle 0(\beta) | T [\bar{\eta}_a(x) \eta_b(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \mathcal{D}_{ab}(k), \quad (5.46.a)$$

$$(\mathcal{D}_{ab})(k) = (U^0)(\mathcal{D}_{ab}^0)(k)(U^0), \quad (5.46.b)$$

$$(\mathcal{D}_{ab}^0)(k) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{k^2 - \alpha\lambda^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{i}{k^2 - \alpha\lambda^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (5.46.c)$$

con  $(U^B)$  dada por (5.45.d). También se puede escribir

$$\mathcal{D}_{ab}(k) = \mathcal{D}_{ab}^0(k) + \mathcal{D}_{ab}^B(k), \quad (5.46.d)$$

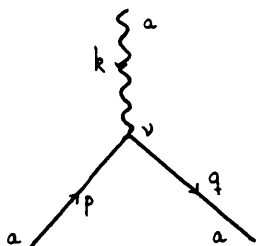
donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{11}^B(k) = \mathcal{D}_{22}^B(k) &= e^{-\beta|k|/2} \mathcal{D}_{12}^B(k) = e^{-\beta|k|/2} \mathcal{D}_{21}^B(k) = \\ &= 2\pi i \delta(k^2 - \alpha\lambda^2) m_B(k). \end{aligned} \quad (5.46.e)$$

Las ecuaciones satisfechas por el propagador de los fantasmas son

$$(\square + \alpha\lambda^2) \mathcal{D}_{ab}(x-y) = i T_{ab} \delta^{(4)}(x-y), \quad (k^2 - \alpha\lambda^2) \mathcal{D}_{ab}(k) = -i T_{ab}. \quad (5.46.f)$$

Los vértices son



$$-ie\gamma^\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-q),$$

donde la línea ondulada denota un fotón y las rectas fermiones. Los fantasmas evolucionan libremente y no interaccionan ni con fotones ni con fermiones.

La forma de la densidad lagrangiana térmica (5.40) nos dice que la estructura combinatoria y topológica de los diagramas es la misma que a temperatura cero.

La componente 11 de los propagadores es la suma de dos términos. El primero es el propagador a temperatura cero y el segundo lleva un factor termodinámico  $n_B(k)$  o  $n_F(p)$  según se trate de bosones o fermiones. Las componentes 22 y 21 del propagador del fotón son las complejas conjugadas de las componentes 11 y 12, respectivamente:

$$D_{11}^{\nu\tau}(k) = D_{22}^{\nu\tau*}(k) \quad , \quad D_{12}^{\nu\tau}(k) = D_{21}^{\nu\tau*}(k) \quad . \quad (5.48)$$

Para el fermión tenemos

$$S_{11}(p) = -S_{22}^*(p) \quad , \quad S_{12}(p) = S_{21}^*(p) \quad . \quad (5.49)$$

donde el complejo conjugado no actúa sobre las matrices de Dirac.

#### 5.4 TFD VERSUS BERNARD

Fujimoto [38] ha efectuado cálculos a uno y dos "loops" en la teoría  $\lambda\phi^4$  usando los formalismos de Bernard y de la TFD y ha obtenido los mismos resultados. A su vez Matsumoto et al. [39] usando la TFD y Bernard [2] usando sus propagadores han obtenido la energía libre de un gas de bosones. En general, y hasta el momento, todos los cálculos comparativos arrojan resultados coincidentes para ambos métodos, lo cual es de esperar pues en la sección 4.5 vi-

mos que correspondían a dos circuitos de integración en el plano complejo del tiempo con los mismos puntos inicial y final.

El formalismo de la TFD presenta frente al de Bernard la ventaja de que las energías pueden tomar valores arbitrarios y ya no hay que efectuar sumas sobre energías sino integrales. A cambio, los propagadores han adquirido una estructura matricial  $2 \times 2$ . Esto parece indicar que por cada cálculo que se hace dentro del marco de Bernard hay que hacer cuatro en el de la TFD. Sin embargo no es así pues los elementos no diagonales 12 y 21 de los propagadores son idénticos y el 22 está relacionado de manera muy sencilla con el 11 mediante complejos conjugados. Por tanto, sólo se duplica el número de cálculos.

Nosotros usaremos la TFD debido a la ventaja que supone tratar con integrales y no con sumas. Algunos autores usan el formalismo de Bernard. Entre ellos cabe destacar a Kislinger y Morley [5], que efectuaron los primeros análisis del problema ultravioleta en QED, Gross, Pisarski y Yaffe [6] y Actor [7].

## 5.5 CONTROVERSIA OTT-PLANCK

Vamos a comentar brevemente la aparente contradicción entre los comportamientos de la temperatura bajo transformaciones "boost" encontrados por Planck [41] y Ott [42]. Una discusión detallada se puede encontrar en los trabajos de van Kamp [43], Yuen [44], Arzelies [45] y ter Haar y Wergeland [45].

Planck encontró que  $T^* \gamma = T$  con  $\gamma = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}$ . En esta expresión,  $T$  y  $T^*$  son respectivamente las temperaturas en los referenciales en que el fluido se encuentra en reposo y en el que tiene una velocidad  $\vec{v}$ . A su vez Ott llegó a  $T^* = \gamma T$ . La contradicción tiene su origen en las distintas definiciones que dan para la tem-



peratura de un fluido perfecto en el referencial que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ . Planck define la temperatura como la inversa de la componente cero del cuadrivector  $\beta\mu^\nu$ , de manera que  $T^{-1} = \beta$  y  $T^{*-1} = \beta u^0 = \beta\gamma$ , que implican que  $T^*\gamma = T$ . A su vez, Ott define la temperatura como la componente cero del vector  $\beta\mu^\nu$  dividido por el cuadrado de éste, es decir, por  $\beta^2$ . Así tenemos que  $T = \beta^{-1}$  y  $T^* = \gamma\beta^{-1}$ , por lo que  $T^* = T\gamma$ . Nótese que según ambas definiciones la temperatura en reposo es la inversa de  $\beta$ .

-97-

### PARTE III

RENORMALIZACION A UN LOOP DE QED A TEMPERATURA FINITA

## CAPITULO 6

### RENORMALIZABILIDAD E IDENTIDADES DE WARD-TAKAHASHI

#### 6.1 INTRODUCCION

En esta tercera parte eliminaremos las divergencias ultravioletas de la QED a temperatura finita mediante una renormalización de la teoría. También evaluaremos las correcciones debidas a la temperatura a los parámetros físicos de la teoría, como por ejemplo, las masas del electrón y del fotón o el momento magnético del electrón.

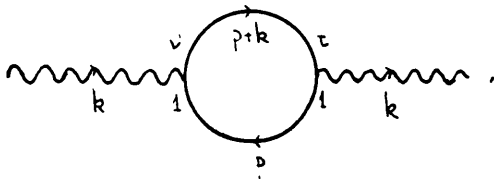
En el capítulo presente, en la sección 6.2, probaremos que efectivamente aparecen divergencias ultravioletas y que la teoría es renormalizable. En 6.3 demostraremos que la parte no transversal del propagador completo del fotón coincide con la del libre, al igual que ocurre a temperatura nula, y que el vértice y el propagador fermiónico guardan la misma relación que a temperatura cero.

En los capítulos 7, 8 y 9 estudiaremos los propagadores completos del fotón y el electrón a orden  $e^2$ , así como la parte de vértice. También calcularemos, a orden  $e^2$ , las correcciones de temperatura a los parámetros físicos.

#### 6.2 RENORMALIZABILIDAD DE LA TEORIA

Para probar que en la QED a temperatura finita hay divergencias ultravioletas consideremos, como ejemplo, la primera correc

ción radiativa al propagador 11 de los fotones, dada por el diagrama



cuyo tensor de polarización es

$$(-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\nu S_{11}(p+k) \gamma^\tau S_{11}(p) \right] .$$

Usando (5.44) se ve inmediatamente que esta integral contiene un único término divergente dado por

$$(-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\nu \frac{i}{p+k-m+i\epsilon} \gamma^\tau \frac{i}{p-m+i\epsilon} \right] ,$$

que precisamente coincide con el tensor de polarización a temperatura nula.

A continuación vamos a probar que la teoría es renormalizable ultravioleta. Daremos una demostración inductiva análoga a la que para el caso  $\lambda\phi^4$  dan Matsumoto, Ojima y Umezawa [16].

Debido a que el comportamiento de los propagadores a temperatura finita (5.44) y (5.45) a grandes momentos es el mismo que a temperatura nula, podemos usar el método de contar potencias. Por tanto, sólo necesitamos estudiar las divergencias ultravioletas

letas en los diagramas fuertemente conexos o diagramas 1PI. Si el número de loops  $L$  es cero, los diagramas de Feynman no presentan infinitos. Para un loop es inmediato probar que las divergencias que aparecen son las mismas que a temperatura cero y que no dependen de  $\beta$ , por lo que se pueden cancelar con los mismos contratérminos que a temperatura nula. Supongamos que para  $L-1$  loops los diagramas 1PI de  $n$  puntos  $W_n$  son finitos merced a los contratérminos que proporciona la renormalización a temperatura cero. Consideremos  $W_n$  a  $L$  loops. Entre estos diagramas  $W_n$  hay algunos que contienen como subdiagramas propios diagramas  $W_m$  ( $m < n$ ) con un número de loops menor que  $L$ . Pero la renormalización llevada a cabo hasta  $L-1$  loops ha hecho estos  $W_m$  finitos, por lo que los diagramas  $W_n$  dentro de los que están contenidos también convergen. Esto nos permite concluir que las únicas nuevas divergencias que aparecen a  $L$  loops resultan de considerar diagramas primitivamente divergentes.

De acuerdo con (5.44) y (5.45) las líneas internas de estos  $W_n$  son la suma de dos partes,  $G^0 + G^\beta$ : una independiente de  $\beta$ ,  $G^0$ , y la otra dependiente,  $G^\beta$ . Como los diagramas son 1PI, cada una de estas líneas debe pertenecer a las integrales de algún loop. Ahora bien,  $G^\beta$  se anula exponencialmente a grandes momentos, por lo que los loops que contengan al menos una  $G^\beta$  son convergentes en el ultravioleta. Esto implica que, a  $L$  loops, las divergencias proceden de los diagramas primitivamente divergentes contruidos usando únicamente  $G^0$ . Pero éstas pueden ser canceladas por los mismos contratérminos que a temperatura nula. Así pues, a  $L$  loops, los diagramas 1PI de  $n$  puntos  $W_n$  son finitos merced a los contratérminos que proporciona la renormalización a temperatura cero. Y, por tanto, QED a temperatura finita es renormalizable (por los mismos contratérminos que a temperatura nula).

### 6.3 IDENTIDADES DE WARD-TAKAHASHI

La identidad de Ward-Takahashi es la relación que existe en QED entre la función de vértice y el propagador del fermión. Sin embargo, en una teoría cuántica de campos se da el nombre genérico de identidades de Ward-Takahashi, abreviadamente WT, a las relaciones que existen entre las funciones de Green de la teoría. En esta sección, y dentro del marco de la QED a temperatura finita, vamos, primero, a exponer un método generador de estas identidades, y, segundo, a usarlo para estudiar la parte no transversal del propagador del fotón y la relación que guardan la función de vértice y el propagador fermiónico.

Las formas de obtener las identidades de WT a temperatura finita son adaptaciones de los métodos que se siguen a temperatura cero. De entre éstos tomaremos como referencia el de Rafael [47], basado a su vez en el trabajo de 't Hooft y Veltman [48].

A temperatura finita la densidad lagrangiana está dada por (5.40). Esta  $\mathcal{L}$  lleva incorporados los fantasmas de Faddeev-Popov  $\bar{\eta}_a$  y  $\eta_a$  ( $a=1,2$ ), que evolucionan libremente. Consideremos la transformación

$$\left. \begin{aligned} A_a^\nu(x) &\longrightarrow A_a'^\nu(x) = A_a^\nu(x) - \omega \partial^\nu \eta_a(x) \\ \psi_a(x) &\longrightarrow \psi_a'(x) = [1 + i e \omega \eta_a(x)] \psi_a(x) \\ \bar{\psi}_a(x) &\longrightarrow \bar{\psi}_a'(x) = \bar{\psi}_a(x) [1 - i e \omega \eta_a(x)] \\ \eta_a(x) &\longrightarrow \eta_a'(x) = \eta_a(x) \\ \bar{\eta}_a(x) &\longrightarrow \bar{\eta}_a'(x) = \bar{\eta}_a(x) + \frac{\omega}{\alpha} \partial_\nu A_a^\nu \end{aligned} \right\} \quad a=1,2, \quad (6.1)$$

donde  $\omega$  es un parámetro anticonmutante independiente de  $x$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 = 0, \quad \omega \bar{\eta}_a + \bar{\eta}_a \omega = 0, \quad \omega \eta_a + \eta_a \omega = 0, \\ \omega \bar{\psi}_a + \bar{\psi}_a \omega = 0, \quad \omega \psi_a + \psi_a \omega = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

La densidad lagrangiana (5.40) es invariante, salvo la divergencia de un cuadrivector, bajo (6.1). Esta transformación es para cada a la particularización de la Becchi, Rouet y Stora al caso abeliano, por lo que la llamaremos transformación BRS.

Por otro lado, la evolución libre de los fantasmas implica que las funciones de Green (completas) con un número impar de fantasmas son nulas. Esto es inmediato a partir de (5.42) expresando  $c(k)$ ,  $\bar{c}(k)$ , ..., en términos de  $c(\beta, k)$ ,  $\bar{c}(\beta, k)$ , ..., y usando que el valor esperado en  $|0(\beta)\rangle$  de un número impar de operadores creación y destrucción  $c(\beta, k)$ ,  $\bar{c}(\beta, k)$ , ..., es cero. En particular,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | T [ \bar{\eta}_d(u) \psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_n}(x_n) \bar{\psi}_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{b_m}(y_m) \cdot \\ \cdot A_{c_1}^{\nu_1}(z_1) \dots A_{c_n}^{\nu_n}(z_n) ] | 0(\beta) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

y lo mismo con  $\eta_d(u)$  en lugar de  $\bar{\eta}_d(u)$ . La invariancia bajo BRS nos dice que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | T [ \eta'_d(u) \psi'_{a_1}(x_1) \dots \psi'_{a_n}(x_n) \bar{\psi}'_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}'_{b_m}(y_m) \cdot \\ \cdot A_{c_1}^{\nu_1}(z_1) \dots A_{c_n}^{\nu_n}(z_n) ] | 0(\beta) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

y otro tanto para  $\eta'_d(u)$ . A partir de (6.3) y (6.4) se generan relaciones entre las funciones de Green. Veamos dos ejemplos.

Parte no transversal del propagador del fotón

Usando (6.1) y

$$\langle 0(\beta) | T[\bar{\eta}_a(x) A_b^\nu(y)] | 0(\beta) \rangle = 0$$

la ecuación

$$\langle 0(\beta) | T[\bar{\eta}'_a(x) A_b^\nu(y)] | 0(\beta) \rangle = 0$$

se simplifica a

$$\langle 0(\beta) | T[\frac{1}{\alpha} \partial_\tau^{(x)} A_a^\tau(x) A_b^\nu(y) + \bar{\eta}_a(x) \partial_{(y)}^\nu \eta_b(y)] | 0(\beta) \rangle = 0.$$

Ahora bien, de (5.43) se sigue que

$$\begin{aligned} T[\partial_\tau^{(x)} A_a^\tau(x) A_b^\nu(y)] &= \partial_\tau^{(x)} T[A_a^\tau(x) A_b^\nu(y)] , \\ T[\bar{\eta}_a(x) \partial_{(y)}^\nu \eta_b(y)] &= \partial_{(y)}^\nu T[\bar{\eta}_a(x) \eta_b(y)] , \end{aligned}$$

por lo que

$$\partial_\tau^{(x)} \langle 0(\beta) | T[A_a^\tau(x) A_b^\nu(y)] | 0(\beta) \rangle = -\alpha \partial_{(y)}^\nu \langle 0(\beta) | T[\bar{\eta}_a(x) \eta_b(y)] | 0(\beta) \rangle . \quad (6.5)$$

El valor esperado del lado izquierdo es el propagador completo de los fotones y el del derecho el de los fantasmas. Así pues, teniendo en cuenta (5.46.a) y definiendo



$$D_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0(\beta) | T [A_a^\nu(x) A_b^\mu(y)] | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-y)} D_{ab}^{\mu\nu}(k) \quad (6.6)$$

la ecuación (6.5) toma la forma, en la representación de momentos,

$$k_\epsilon D_{ab}^{\mu\nu}(k) = \alpha k^\nu \mathcal{L}_{ab}^{\mu}(k). \quad (6.7)$$

El lado de la izquierda es la parte transversal del propagador completo del fotón, y el de la derecha la del libre. Esto nos permite concluir que la parte no transversal del propagador completo del fotón coincide con la del libre.

#### Identidad de WT

De

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | T [\bar{\eta}_a(x) \psi_b(y) \bar{\psi}_c(z)] | 0(\beta) \rangle &= 0, \\ \langle 0(\beta) | T [\bar{\eta}'_a(x) \psi'_b(y) \bar{\psi}'_c(z)] | 0(\beta) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \partial_\nu^{(x)} \langle 0(\beta) | T [A_a^\nu(x) \psi_b(y) \bar{\psi}_c(z)] | 0(\beta) \rangle &= ie \{ \langle 0(\beta) | T [\bar{\eta}_a(x) \bar{\eta}_b(y)] | 0(\beta) \rangle - \\ &- \langle 0(\beta) | T [\bar{\eta}_a(x) \eta_c(z)] | 0(\beta) \rangle \} \langle 0(\beta) | T [\psi_b(y) \bar{\psi}_c(z)] | 0(\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Llamando  $S_{ab}(p)$  al propagador fermiónico completo en la representación de momentos, y  $V_{abc}^\nu(p+q, p)$  al vértice completo,

$$S_{ab}(x,y) = \langle 0(\beta) | T[\psi_a(x) \bar{\psi}_b(y)] | 0(\beta) \rangle = \int \frac{d^u p}{(2\pi)^u} e^{-ip(x-y)} S_{ab}(p) ,$$

$$\begin{aligned} V_{abc}^v(x,y,z) &= \langle 0(\beta) | T[A_a^v(x) \psi_b(y) \bar{\psi}_c(z)] | 0(\beta) \rangle = \\ &= \int \frac{d^u q}{(2\pi)^u} \frac{d^u p}{(2\pi)^u} e^{-i[qx + py - (p+q)z]} V_{abc}^v(p,q,p) , \end{aligned}$$

la ecuación (6.8) se escribe, en la representación de momentos, como

$$q_v V_{abc}^v(p+q,p) = e [\mathcal{D}_{ab}/q S_{bc}(p+q) - \mathcal{D}_{ac}(q) S_{bc}(p)] . \quad (6.9)$$

A continuación se escriben los vértices  $V_{abc}^v(p+q,p)$  en términos de unos vértices  $\Gamma_{abc}^v(p+q,p)$  sin propagadores externos:

$$V_{abc}^v(p+q,p) = -ie \sum_{a'=1}^2 \sum_{b'=1}^2 \sum_{c'=1}^2 S_{c'}(p,q) \Gamma_{\tau}^{a'b'c'}(p,q,p) S_{b'b}(p) D_{a'a}^{v\tau}(q) . \quad (6.10)$$

Llevando (6.10) a (6.9) y usando (6.7) se obtiene

$$q_v \Gamma_{abc}^v(p+q,p) = i [\delta_{ab} S_{bc}^{-1}(p+q) - \delta_{ac} S_{cb}^{-1}(p)] , \quad (6.11)$$

que es el equivalente a temperatura finita de la identidad de Takahashi.

## CAPITULO 7

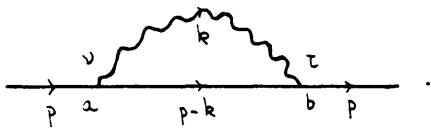
### MASA EFECTIVA DEL ELECTRON A TEMPERATURA FINITA

#### 7.1 INTRODUCCION

En este capítulo, en la sección 2, probaremos explícitamente que las únicas divergencias ultravioletas que aparecen a un loop en la autoenergía fermiónica son las mismas que a temperatura cero y son independientes de la temperatura. Veremos también que tales divergencias se cancelan con los mismos contraterminos que a temperatura nula. Ya en la tercera sección construiremos el propagador fermiónico completo a orden  $e^2$  libre de divergencias ultravioletas. En la sección 4 calcularemos la masa del electrón a temperatura finita. Obtendremos una masa que depende de la temperatura y del momento del electrón, por lo que hablaremos de una masa efectiva, en analogía con el lenguaje de la Física Nuclear y de la Física del Estado Sólido. En la sección 5 desarrollaremos el resultado obtenido en la anterior sección para temperaturas altas ( $\beta m \ll 1$ ) y bajas ( $\beta m \gg 1$ ). Finalmente, en la sexta sección evaluaremos la contribución al momento magnético debida a las correcciones térmicas de la autoenergía fermiónica.

#### 7.2 AUTOENERGIA DEL FERMION

El diagrama de Feynman de la autoenergía del fermión a primer orden radiativo  $\Sigma_{ab}(p)$  es



Usando las reglas de Feynman del capítulo 5 tenemos

$$-i \sum_{ab}^{(D)} = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S_{ab}(p-k) D_{ab}^{\nu\tau}(k) \gamma_\tau, \quad (7.1)$$

que se puede escribir

$$\sum_{ab}^{(D)}(p) = \sum_{j=0}^2 \sum_{ab}^{(jB)}(p), \quad (7.2)$$

donde

$$\sum_{ab}^{(jB)}(p) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \mathcal{J}_{ab}^{(jB)\nu\tau}(k) \gamma_\tau, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{J}_{ab}^{(0)\nu\tau}(k) = S_{ab}^0(p-k) D_{ab}^{\nu\tau 0}(k), \quad (7.4.a)$$

$$\mathcal{J}_{ab}^{(1B)\nu\tau}(k) = S_{ab}^0(p-k) D_{ab}^{\nu\tau B}(k) + S_{ab}^B(p-k) D_{ab}^{\nu\tau 0}(k), \quad (7.4.b)$$

$$\mathcal{J}_{ab}^{(2B)\nu\tau}(k) = S_{ab}^B(p-k) D_{ab}^{\nu\tau B}(k). \quad (7.4.c)$$

Los superíndices 0,  $\beta$  y  $2\beta$  hacen referencia al número de factores termodinámicos  $n_B(k)$  y  $n_F(p-k)$  que contienen las integrales.

Utilizando (5.48) y (5.49) obtenemos que

$$\sum_{41}^{(j\beta)}(p) = \sum_{22}^{(j\beta)*}(p) \quad , \quad \sum_{42}^{(j\beta)}(p) = \sum_{24}^{(j\beta)*}(p) \quad , \quad (j=0,1,2) \quad , \quad (7.5)$$

donde el complejo conjugado no actúa sobre las matrices de Dirac.

De (5.44) y (5.45) se sigue que las integrales  $\Sigma_{ab}^{(j\beta)}(p)$  ( $j=1,2$ ) convergen en el ultravioleta. La razón es que contienen, al menos, un factor  $n_B(k)$  o  $n_F(p-k)$ , y que éstos decrecen exponencialmente cuando  $k$  crece indefinidamente, por lo que los integrandos se comportan adecuadamente en el ultravioleta. Por el contrario las partes de la autoenergía independientes de  $\beta$ ,  $\Sigma_{11}^{(0)}(p)$  y  $\Sigma_{22}^{(0)}(p)$ , son divergentes. En efecto; las ecuaciones (5.44) y (5.45) implican que  $\Sigma_{11}^{(0)}(p)$  es precisamente la autoenergía del fermión a temperatura cero, la cual es divergente en el ultravioleta, por lo que, según (7.5),  $\Sigma_{22}^{(0)}(p)$  también lo es. Recordemos que [47,49]

$$\Sigma_{44}^{(0)}(p) = \delta m(\Lambda) - [Z_2^{-1}(\Lambda) - 1](\not{p} - m) + (\not{p} - m)^2 \Sigma_F(p) \quad ,$$

donde  $\Sigma_F(p)$  es una función finita de  $\not{p}$  (y de  $p^2$ ), y  $\delta m(\Lambda)$  y  $Z_2(\Lambda)$  son cantidades infinitas que dependen de un factor de corte ultravioleta  $\Lambda$ :

$$\delta m(\Lambda) = \frac{3e^2}{16\pi^2} m \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2} \right) ,$$

$$Z_2(\Lambda) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \alpha \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + (3-\alpha) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \text{cte} \right\} = \frac{9}{2} \text{ para } \alpha=1 \} .$$

Para eliminar estas divergencias redefinimos la masa y los campos como

$$m_R = m + \delta m(\Lambda) ,$$

$$\psi_a^R = Z_2^{-1/2}(\Lambda) \psi_a , \quad \bar{\psi}_a^R = Z_2^{-1/2}(\Lambda) \bar{\psi}_a , \quad (a=1,2) ,$$

y añadimos a la densidad lagrangiana (5.40) los contratérminos

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{a=1,2} \left\{ \delta m(\Lambda) \bar{\psi}_a^R \psi_a^R + [Z_2(\Lambda)-1] \bar{\psi}_a^R \left( \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\not{D}} - m_R \right) \psi_a^R \right\} .$$

Entonces, en lugar de (7.2) obtenemos la siguiente autoenergía renormalizada

$$\sum_{ab}^{(R)}(p) = \sum_{j=0}^1 \sum_{ab}^{(R,j)}(p) , \quad (7.6)$$

donde ahora

$$\sum_{ab}^{(R,0)}(p) = \sum_{ab}^{(0)}(p) - \delta_{ab} \left\{ \delta m(\Lambda) - (p - m_R) [Z_2(\Lambda)-1] \right\} , \quad (7.7)$$

$$\sum_{ab}^{(R,j)}(p) = \sum_{ab}^{(j)}(p) \quad (j=1,2) , \quad (7.8)$$

con  $\Sigma_{ab}^{(j\beta)}(p)$  dadas por (7.3) sustituyendo  $m$  por  $m_R$ . (Nótese que al orden en que estamos trabajando, orden  $e^2$ ,  $e^2_m$  y  $e^2_{m_R}$  son iguales).

Lo hecho está de acuerdo con lo ya anticipado en la sección 6.2: las divergencias ultravioletas son independientes de  $\beta$  y se cancelan con los mismos contratérminos que a temperatura nula.

De (7.7) y (7.8) se sigue que

$$\sum_{11}^{(R,j\beta)}(p) = \sum_{22}^{(R,j\beta)*}(p), \quad \sum_{12}^{(R,j\beta)}(p) = \sum_{21}^{(R,j\beta)*}(p), \quad (j=0,1,2), \quad (7.9)$$

que reduce el cálculo de  $\Sigma_{ab}^{(R)}(p)$  a dos casos: el  $a=b=1$  y el  $a=1, b=2$ .

$a=b=1$

La parte independiente de  $\beta$  está dada por

$$\sum_{11}^{(R,0)}(p) = (\beta - m_R)^2 \Sigma_f(p). \quad (7.10)$$

La primera corrección termodinámica  $\Sigma_{11}^{(R,\beta)}(p)$ , usando (7.3), (7.4.b), (5.44) y (5.45), se puede escribir como suma de dos términos, el primero independiente del parámetro  $\alpha$  del gauge y el segundo no:

$$\sum_{11}^{(R,\beta)}(p) = \sum_{11,0}^{(R,\beta)}(p) + \sum_{11,\alpha}^{(R,\beta)}(p), \quad (7.11)$$

$$\sum_{11,0}^{(R,3)}(p) = 2e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (p-k-2m_e) \left[ \frac{\delta(k^2-\lambda^2) n_B(k)}{(p-k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} - \frac{\delta((p-k)^2 - m_e^2) n_F(p-k)}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \right],$$

$$\sum_{11,\alpha}^{(R,3)}(p) = \frac{e^2}{\lambda^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ k(k^2 - 2pk) + k^2(p-m_e) \right] \left[ \frac{\delta(k^2 - \alpha\lambda^2) n_B(k)}{(p-k)^2 - m_e^2 + i\epsilon} + \frac{\alpha\lambda^2 \delta((p-k)^2 - m_e^2) n_F(p-k)}{(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)(k^2 - \alpha\lambda^2 + i\epsilon)} \right] - (\alpha \rightarrow 1).$$

Los dos únicos vectores de que disponemos son  $p^\nu$  y  $u^\nu$ , por lo que cada una de estas dos integrales será una combinación lineal de la matriz identidad  $4 \times 4$ ,  $\not{p}$  y  $\not{u}$ ,

$$\sum_{11,0}^{(R,3)}(p) = a \not{1}_{11,0} + b \not{p}_{11,0} + c \not{u}_{11,0}, \quad (7.12)$$

$$\sum_{11,\alpha}^{(R,3)}(p) = a' \not{1}_{11,\alpha} + b' \not{p}_{11,\alpha} + c' \not{u}_{11,\alpha}, \quad (7.13)$$

cuyos coeficientes serán funciones de los invariantes Lorentz

$$\xi = pu \quad \text{y} \quad p^2 = \xi^2 - p^2. \quad (7.14)$$





$\xi$  y  $\rho$ , en el referencial en que  $u^V = (1, \vec{0})$  son precisamente la energía y el trinamento al cuadrado del fermión. Tras un cálculo algebraico obtenemos, para la parte independiente de  $\alpha$ ,

$$a_{11}^B = -\frac{e^2 m_R}{4\pi^3} [I_B(1) + I_F] \quad (7.15)$$

$$b_{11}^B = \frac{e^2}{4\pi^3 p^2} \left\{ (p^2 - p_F^2 - m_R^2 - \lambda^2) [I_B(1) + I_F] - \frac{1}{5} [U_B(1) + U_F] - 2 [C_B(1) + C_F] \right\} \quad (7.16)$$

$$c_{11}^B = -\frac{e^2 \xi}{4\pi^3 p^2} \left\{ (p^2 - m_R^2 - \lambda^2) [I_B(1) + I_F] - 2 \frac{p^2}{5} [U_B(1) + U_F] - 2 [C_B(1) + C_F] \right\} \quad (7.17)$$

y, para la parte dependiente de  $\alpha$ ,

$$a_{11}^B = -\frac{e^2 m_R}{4\pi^3} \alpha [I_B(\alpha) + I_F + \alpha \lambda^2 J_F(\alpha)] - (\alpha \rightarrow 1) \quad (7.18)$$

$$b_{11}^B = \frac{e^2}{4\pi^3 p^2 \lambda^2} \left\{ [I_B(\alpha) + I_F + \alpha \lambda^2 J_F(\alpha)] - \frac{1}{5} (p^2 - m_R^2) [U_B(\alpha) + \alpha \lambda^2 V_F(\alpha) - \frac{1}{5} C_B(\alpha) - \frac{\alpha \lambda^2}{5} I_F] \right\} - (\alpha \rightarrow 1) \quad (7.19)$$

$$c_{11}^B = -\frac{e^2 \xi}{4\pi^3 p^2 \lambda^2} (p^2 - m_R^2) \left\{ (p^2 - m_R^2 + \alpha \lambda^2) [I_B(\alpha) + \alpha \lambda^2 J_F(\alpha)] + \alpha \lambda^2 I_F + 2 C_B(\alpha) - 2 \frac{p^2}{5} [U_B(\alpha) + \alpha \lambda^2 V_F(\alpha)] \right\} - (\alpha \rightarrow 1) \quad (7.20)$$

En estas expresiones,  $I_B(\alpha)$ ,  $U_B(\alpha)$ ,  $I_F$ ,  $U_F$ ,  $J_F(\alpha)$  y  $V_F(\alpha)$  son las integrales complejas

$$\begin{pmatrix} I_B(\alpha) \\ U_B(\alpha) \end{pmatrix} = \int d^4k \begin{pmatrix} 1 \\ uk \end{pmatrix} \frac{1}{(p-k)^2 - m_R^2 + i\epsilon} \frac{\delta(k^2 - \alpha\lambda^2)}{e^{\beta i k u} - 1}, \quad (7.21)$$

$$\begin{pmatrix} I_F \\ U_F \end{pmatrix} = \int d^4k \begin{pmatrix} 1 \\ uk \end{pmatrix} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \frac{\delta((p-k)^2 - m_R^2)}{e^{\beta(i\xi \cdot k u - \mu)} - 1}, \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} J_F(\alpha) \\ V_F(\alpha) \end{pmatrix} = \int d^4k \begin{pmatrix} 1 \\ uk \end{pmatrix} \frac{1}{(k^2 - \alpha\lambda^2 + i\epsilon)(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)} \frac{\delta((p-k)^2 - m_R^2)}{e^{\beta(i\xi \cdot k u - \mu)} - 1}, \quad (7.23)$$

y  $C_B(x)$  y  $C_F$  las integrales reales

$$C_B(x) = \frac{1}{2} \int d^4k \frac{\delta(k^2 - \alpha\lambda^2)}{e^{\beta i k u} - 1}, \quad (7.24)$$

$$C_F = \frac{1}{2} \int d^4k \frac{\delta(k^2 - m_R^2)}{e^{\beta(i\xi \cdot k u - \mu)} - 1}. \quad (7.25)$$

Cuando  $\rho=0$  los lados derechos de (7.16), (7.17), (7.19) y (7.20) se hacen singulares. Sin embargo esto no supone problema alguno. En efecto; si  $\rho=0$ ,  $p^\nu$  y  $u^\nu$  son paralelos,  $p^\nu = \xi u^\nu$ , y entonces, según se desprende de (7.12) y (7.13), lo que interesa no son los coeficientes  $b_{11,x}^\beta$  y  $c_{11,x}^\beta$  ( $x=0,\alpha$ ) por separado, sino la combinación  $\xi b_{11,x}^\beta + c_{11,x}^\beta$ , en la que ha desaparecido la

singularidad. (Esto mismo va a ocurrir con (7.28), (7.29), (7.31), (7.32), y (7.39), (7.40), (7.42), (7.43)).

Nótese también que las ecuaciones (7.19) y (7.20) contienen unos factores globales  $1/\lambda^2$ . En general, los coeficientes que los multiplican no son nulos, apareciendo así unas divergencias infra-rojas que depende de  $\alpha$  y de  $\beta$ , y que no existían cuando la temperatura era cero. Sin embargo, ya veremos más adelante que no contribuyen a los parámetros físicos (masa y momento magnético del electrón).

Con la segunda corrección termodinámica  $\sum_{11}^{(R, 2\beta)}(p)$ , procedemos de la misma forma y obtenemos

$$\sum_{11}^{(R, 2\beta)}(p) = a_{11,0}^{2\beta} + a_{11,\alpha}^{2\beta} + (b_{11,0}^{2\beta} + b_{11,\alpha}^{2\beta})\beta + (c_{11,0}^{2\beta} + c_{11,\alpha}^{2\beta})\mu, \quad (7.26)$$

donde

$$a_{11,0}^{2\beta} = -\frac{e^2 m_R}{\pi^2} M(1), \quad (7.27)$$

$$b_{11,0}^{2\beta} = \frac{e^2}{4\pi^2 p^2} [(2p^2 + p^2 m_R^2 + \lambda^2) M(1) + 2\xi W(1)], \quad (7.28)$$

$$c_{11,0}^{2\beta} = -\frac{e^2 \xi}{4\pi^2 p^2} [(p^2 - m_R^2 + \lambda^2) M(1) + 2\frac{p^2}{\xi} W(1)], \quad (7.29)$$

y

$$a_{11,\alpha}^{2\beta} = -\frac{e^2 m_R}{4\pi^2} \alpha M(\alpha) - (\alpha \rightarrow 1), \quad (7.30)$$

$$D_{11,x}^{j\beta} = \frac{e^2}{4\pi^2 p^2 \lambda^2} \{ [2x\lambda^2 p^2 + (p^2 - m_R^2)(p^2 - m_R^2 - x\lambda^2)] M(x) - \\ - 2\xi(p^2 - m_R^2) W(x) \} - (x \rightarrow 1) , \quad (7.31)$$

$$C_{11,x}^{j\beta} = - \frac{e^2 E}{4\pi^2 p^2 \lambda^2} (p^2 - m_R^2) [ (p^2 - m_R^2 + x\lambda^2) M(x) - 2 \frac{p^2}{\xi} W(x) ] - (x \rightarrow 1) , \quad (7.32)$$

con  $M(x)$  y  $W(x)$  las integrales imaginarias puras

$$\begin{pmatrix} M(x) \\ W(x) \end{pmatrix} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega k \end{pmatrix} \frac{\delta(k^2 - x\lambda^2)}{e^{\beta|k\omega| - 1}} \frac{\delta((p-k)^2 - m_R^2)}{e^{\beta(|\xi - k\omega| - \mu) + 1}} . \quad (7.33)$$

En resumen, de (7.6), (7.10)-(7.13) y (7.26) obtenemos

$$\sum_{11}^{(R)} |p| = (p^2 - m_R^2)^2 \sum_f (p) + a_{11} - b_{11} p - c_{11} \omega , \quad (7.34)$$

$$x_{11} = x_{11,0}^{\beta} + x_{11,x}^{\beta} + x_{11,0}^{2\beta} + x_{11,x}^{2\beta} \quad (x = a, b, c) , \quad (7.35)$$

con los coeficientes  $x_{11,0}^{j\beta}$  y  $x_{11,x}^{j\beta}$  ( $j=1,2$ ) dados por (7.15)-(7.20) y (7.27)-(7.32) en términos de las integrales (7.21)-(7.25) y (7.33). Debido al carácter complejo de algunas de estas integrales,  $\sum_{11}^{(R)}(p)$  es en general compleja.

a=1, b=2

Procediendo de forma análoga al caso a=b=1 llegamos a

$$\sum_{12}^{(R)} p_i = a_{12} + b_{12} p + c_{12} \lambda, \quad (7.36)$$

con los coeficientes  $a_{12}$ ,  $b_{12}$  y  $c_{12}$  dados por la suma

$$\chi_{12} = \chi_{12,c}^{2\beta} + \chi_{12,c}^{2\beta} \quad (x=a,b,c), \quad (7.37)$$

donde

$$a_{12,c}^{2\beta} = \frac{e^2 m_R}{\pi^2} Q(1), \quad (7.38)$$

$$b_{12,c}^{2\beta} = -\frac{e^2}{4\pi^2 p^2} \left[ (2p^2 + p^2 - m_R^2 - \lambda^2) Q(1) + 2\xi X(1) \right], \quad (7.39)$$

$$c_{12,c}^{2\beta} = \frac{e^2 \xi}{4\pi^2 p^2} \left[ (p^2 - m_R^2 - \lambda^2) Q(1) + 2 \frac{p^2}{\xi} X(1) \right], \quad (7.40)$$

y

$$a_{12,x}^{2\beta} = \frac{e^2 m_R}{4\pi^2} \alpha Q(\alpha) - (\alpha \rightarrow 1), \quad (7.41)$$

$$b_{12,x}^{2\beta} = -\frac{e^2}{8\pi^2 p^2 \lambda^2} \left\{ [2p^2 \lambda^2 + (p^2 - m_R^2)(p^2 - m_R^2 + \alpha \lambda^2)] Q(\alpha) - \right. \\ \left. - 2\xi (p^2 - m_R^2) X(\alpha) \right\} - (\alpha \rightarrow 1), \quad (7.42)$$

$$c_{12,x}^{2\beta} = \frac{e^2 \xi}{8\pi^2 p^2 \lambda^2} (p^2 - m_R^2) \left[ (p^2 - m_R^2) Q(\alpha) - 2 \frac{p^2}{\xi} X(\alpha) \right] - (\alpha \rightarrow 1). \quad (7.43)$$

Las expresiones de  $Q(\alpha)$  y  $X(\alpha)$  son

$$\begin{pmatrix} Q(\alpha) \\ X(\alpha) \end{pmatrix} = i \int d^4k \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha k \end{pmatrix} \frac{e^{\beta i k \omega / 2}}{e^{\beta i k \omega} - 1} \frac{e^{\beta (15 - k \omega - \mu) / 2}}{e^{\beta (15 - k \omega - \mu)} + 1} \times$$

$$\times \delta(k^2 - \alpha \lambda^2) \delta((p - k)^2 - m_R^2) . \quad (7.44)$$

Recordando que en (7.9) el complejo conjugado no actúa sobre las matrices de Dirac y teniendo en cuenta (7.34) y (7.36) obtenemos la relación

$$x_{ab} = x_{ba}^* \quad (x = a, b, c) . \quad (7.45)$$

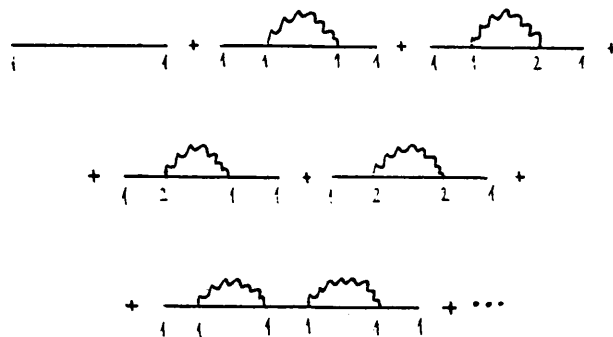
### 7.3 EL PROPAGADOR FERMIONICO

El propagador fermiónico a primer orden radiativo  $\mathcal{S}_{ab}^{(R)}(p)$  está dado por la serie inducida por la inclusión repetida de las autoenergías  $-i\Sigma_{ab}^{(R)}(p)$  en el propagador libre. Por ejemplo,

$\mathcal{S}_{11}^{(R)}(p)$  vendrá dado por la serie

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11}^{(R)} &= S_{11} + S_{11} (-i \Sigma_{11}^{(R)}) S_{11} + S_{11} (-i \Sigma_{12}^{(R)}) S_{21} + \\ &+ S_{12} (-i \Sigma_{21}^{(R)}) S_{11} + S_{12} (-i \Sigma_{22}^{(R)}) S_{22} + \\ &+ S_{11} (-i \Sigma_{11}^{(R)}) S_{11} (-i \Sigma_{11}^{(R)}) S_{11} + \dots \end{aligned}$$

que corresponde a la suma de diagramas



En general  $S_{ab}^{(R)}(p)$  vendrá dado por

$$\begin{aligned}
 S_{ab}^{(R)} &= S_{ab} + \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} S_{ac} (-i \sum_{e,d}^{(R)}) S_{cb} + \\
 &- \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} \sum_{f=1,2} \sum_{g=1,2} S_{ac} (-i \sum_{e,d}^{(R)}) S_{df} (-i \sum_{f,g}^{(R)}) S_{gb} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{7.46}$$

Formalmente, la serie (7.46) la podemos sumar, obteniendo que

$$S_{ab}^{(R)-1}(p) = S_{ab}^{-1}(p) + i \sum_{ab}^{(R)}(p),$$

que usando que

$$S_{ab}^{(1)}(p) = -i S_{ab}(\not{p} - m)$$

se puede escribir

$$S_{ab}^{(R)-1}(p) = -i S_{ab}(\not{p} - m_R) + i \Sigma_{ab}^{(R)}(p), \quad (7.47)$$

que es la inversa del propagador completo, a orden  $e^2$ , libre de divergencias ultravioletas a temperatura no nula.

#### 7.4 MASA EFECTIVA DEL ELECTRON A TEMPERATURA FINITA

La masa física del electrón está dada por el polo de las componentes diagonales del propagador completo. Ahora bien, de acuerdo con (7.47) y (7.34) dicho polo es la solución en  $p^2$  de la ecuaación

$$\{ \not{p} [1 - b_{dd} + 2m_R \Sigma_f(p)] - c_{dd} \not{d} \}^L - [m_R + (p^2 + m_R^2) \Sigma_f(p) + a_{dd}]^2 = 0,$$

que a orden  $e^2$  es

$$p^2 = m_R^2(p) = m_R^2 + 1 \left( a_{dd} m_R + b_{dd} m_R^2 + \xi c_{dd} \right) p^2 = m_R^2. \quad (7.48)$$



Vamos a evaluar el lado derecho de esta ecuación.

Las ecuaciones (7.18)-(7.20) y (7.30)-(7.32) implican que

$$(a_{11,x}^{j\beta} + b_{11,x}^{j\beta} m_R) \Big|_{p^2=m_R^2} = c_{11,x}^{j\beta} \Big|_{p^2=m_R^2} = 0 \quad (j=1,2). \quad (7.49)$$

En cuanto a  $x_{11,0}^{2\beta}$  ( $x = a, b, c$ ), las ecuaciones (7.27) y (7.28) las dan en términos de las integrales  $M(1)$  y  $W(1)$ , cuyos integrandos contienen las deltas de Dirac  $\delta(k^2 - \lambda^2)$  y  $\delta((p-k)^2 - m_R^2)$ . Pero cuando  $p^2 = m_R^2$  (y  $\lambda = 0$ ) es imposible que los argumentos de ambas deltas se anulen simultáneamente, por lo que

$$\lambda_{11,0}^{2\beta} \Big|_{p^2=m_R^2} = 0 \quad (x = a, b, c). \quad (7.50)$$

Por la misma razón,

$$i m x_{11,0}^{\beta} \Big|_{p^2=m_R^2} = 0 \quad (x = a, b, c). \quad (7.51)$$

Llevando (7.49)-(7.51) a (7.35) y lo que resulta a (7.48) obtenemos

$$m_R \beta = m_R - (a_{11,0}^{\beta} + b_{11,0}^{\beta} m_R + \frac{\xi}{m_R} c_{11,0}^{\beta}) \Big|_{p^2=m_R^2}, \quad (7.52)$$

que, teniendo en cuenta los resultados del apéndice D, la podemos escribir

$$m_R(\beta) = m_R + \frac{e^2}{12 m_R \beta^2} + \frac{e^2}{2\pi^2 m_R} \int_0^\infty dk \frac{k N_F(k)}{k(m_R)} \left[ k + \frac{m_R^2}{p} \ln \left| \frac{k-p}{k+p} \right| \right], \quad (7.53)$$

donde

$$N_F(k) = \frac{1}{\exp\{3[k(m_R) - \mu]\} + 1}, \quad k(x) = \sqrt{k^2 + x^2}. \quad (7.54)$$

Obsérvese que, a orden  $e^2$ , el polo de  $\mathcal{D}_{11}^{(R)}(p)$  y el de  $\mathcal{D}_{22}^{(R)}(p)$  coinciden, al igual que ocurre con el propagador libre.

Con respecto a (7.53) hemos de hacer varias observaciones. La masa  $m_R(\beta)$  depende, además de  $e$  y  $m^{(*)}$ , (como ocurre a temperatura cero), de  $\beta$  y  $\rho$ . Esta dependencia en  $\rho$  tiene su origen en el hecho de que a temperatura nula, a partir de  $p^0$ , sólo se puede construir el invariante Lorentz  $p^2$ , mientras que a temperatura finita se pueden construir dos,  $\rho$  y  $\xi$ , con  $p^2 = \xi^2 - \rho^2$ . Por otro lado el que la masa dependa del momento de la partícula aparece en muchos problemas físicos: piénsese, por ejemplo, en una partícula moviéndose en una red cristalina o un nucleón en el interior de un núcleo. En todos estos casos se habla de masa efectiva de la partícula en cuestión. Por analogía, a  $m_R(\beta)$  la llamaremos masa efectiva del electrón a temperatura finita y la denotaremos  $m_R(\beta, \rho)$ . Por último, nótese que  $m_R(\beta, \rho)$  es finita infrarroja e independiente del gauge.

---

(\*) Recuérdese que a orden  $e^2$ ,  $e^2 m = e^2 m_R$

Si particularizamos (7.53) para una cuadrivelocidad  $u^\nu = (1, \vec{0})$ , y, por tanto,  $\rho = |\vec{p}|$ , recuperamos el resultado de Donoghue y Holstein [9] ( $|\vec{p}| \neq 0$ ). El de Peressutti y Skagerstam [8] ( $|\vec{p}| = 0$ ) es inmediato a partir de (7.56) teniendo en cuenta que, cuando  $\rho \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{p} \ln \left| \frac{k \cdot p}{k \cdot \rho} \right| = -\frac{2}{k} + O(p). \quad (7.55)$$

Frente a estos resultados, (7.53) presenta la ventaja de su covariancia Lorentz.

Terminemos esta sección con un comentario referente a la covariancia. Hay autores que efectúan los cálculos en el referencial en el que fluido permanece en reposo, i.e.,  $u^\nu = (1, \vec{0})$ , y en lugar de (7.34) obtienen, dentro del marco del formalismo de Dolan y Jackiw,

$$\Sigma_{11}(p) = (\not{p} \cdot m_A)^2 \Sigma_1(p) + A \not{p} \cdot \not{p} + B \not{p} \cdot \not{p} + C.$$

Los coeficientes A, B y C se corresponden respectivamente con nuestros  $b_{11} + \frac{11}{p_0}$ ,  $b_{11}$  y  $a_{11}$ . Dichos autores afirman, sin especificar más, que en un tratamiento covariante se tendría A=B. Evidentemente esto es cierto, tal y como lo refleja nuestra ecuación (7.34), pero es incompleto, puesto que se olvidan del término que va con  $\not{p}$ . Este término tiene su importancia, tal y como vamos a ver.

Como las cantidades divergentes ultravioletas son las mismas que a temperatura cero y son independientes de la temperatura, hemos renormalizado con los mismos contratérminos que a temperatura nula. Podíamos haber adoptado otro punto de vista: imponer al propagador ciertas condiciones de renormalización. Por ejemplo, que el polo de las componentes diagonales del propagador fuese  $\not{p} = m$

con residuo 1. Ahora bien, la presencia en (7.34) del sumando que va con  $\not{A}$  implica que  $\delta m(\Lambda)$  y  $z_2(\Lambda)$  serían las mismas que a temperatura nula más correcciones finitas ultravioletas dependientes de  $\beta$ , algunas de las cuales con estructura matricial. Por ejemplo, para que el polo de las componentes diagonales del propagador sea  $p=m$  el contratérmino de masa debe ser

$$\sum_{a=1,2} \bar{\psi}_a \left[ i m(\Lambda) + a \int_{11,0}^{\beta} - b \int_{11,0}^{\beta} m - c \int_{11,0}^{\beta} \not{A} \right]_{p^2=m^2} \psi_a ,$$

cuyo último sumando es del tipo  $\bar{\psi}_a \not{A} \psi_a$ . Para poder añadir este contratérmino a la densidad lagrangiana (5.40) es necesario sustituir  $m$  por la masa renormalizada  $m_R$  y restar

$$\left( a \int_{11,0}^{\beta} + b \int_{11,0}^{\beta} m + c \int_{11,0}^{\beta} \not{A} \right)_{p^2=m^2} .$$

Al hacer esto la parte fermiónica libre de la densidad lagrangiana renormalizada a un loop pasa a ser, en la representación de momentos,

$$\sum_{a=1,2} \bar{\psi}_a \left( \not{p} - c \int_{11,0}^{\beta} \not{A} - a \int_{11,0}^{\beta} - b \int_{11,0}^{\beta} m \right)_{p^2=m^2} \psi_a ,$$

a partir de la cual se obtiene (7.53). Obsérvese que en el fondo lo que se está haciendo es sumar y restar una misma cantidad a la densidad lagrangiana y dotar innecesariamente a los contra términos de una estructura matricial. Otro tanto ocurre con la constante de renormalización  $z_2$ , punto no señalado por algunos autores ya que al efectuar los cálculos para  $u^v=(1,0)$  se olvidan del término que en la autoenergía va con  $\not{A}$ . Es precisamente por esto por lo que nosotros hemos preferido cancelar las divergencias ultravioletas con los mismos contratérminos que a

temperatura cero. Hay además otra razón: el punto de renormalización en el esquema seguido por nosotros es  $p^2 = m^2$ , mientras que en el otro hay que fijar además el valor de  $\rho$ . Por otro lado, ambos esquemas están relacionados mediante una renormalización finita.

En el tratamiento covariante, la presencia del vector  $u^\nu$  es importante a la hora de expresar un tensor como combinación lineal de otros con coeficientes que sean amplitudes invariantes Lorentz.

#### 7.5 DESARROLLOS A ALTAS Y BAJAS TEMPERATURAS

En esta sección vamos a evaluar (7.53) en el caso de temperaturas altas y bajas. Las temperaturas son altas si  $\beta m_R \ll 1$  y bajas si  $\beta m_R \gg 1$ . Si nos situamos en un referencial en el que el fluido se encuentra en reposo, i.e.,  $u^\nu = (1, \vec{0})$  y  $\beta = 1/T$ , y tenemos en cuenta que  $m_R \sim 10^{10}$  K, las temperaturas altas se alcanzarán solamente en el universo primitivo ( $t \lesssim 10$  s). Como dato orientativo podemos decir que la temperatura en el centro de estrellas muy calientes no es superior a  $10^8$  K.

En lo que sigue vamos a tomar el potencial químico de los fermiones nulo, es decir hacemos  $\mu = 0$  en (7.54).

##### Temperaturas altas

Definamos la corrección relativa a la masa del electrón debida a la temperatura  $\delta m(\beta, \rho)$  como

$$\delta m(\beta, \rho) = \frac{m_R \beta \rho - m_R}{m_R}, \quad (7.56)$$

con  $m_R(\beta, \rho)$  dada por (7.53). Usando (7.53) y (7.54) podemos escribir

$$\delta m(\beta, \rho) = \delta m(\beta) + \delta_p m(\beta), \quad (7.57)$$

donde

$$\delta m(\beta) = \frac{e^2}{12 m_R^2 \beta^2} + \frac{e^2}{2\pi^2 m_R^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 - m_R^2}{k(m_R)} N_F(k), \quad (7.58)$$

$$\delta_p m(\beta) = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k N_F(k)}{k(m_R)} \left[ \frac{1}{\rho} \ln \left| \frac{k-\rho}{k+\rho} \right| + \frac{2}{k} \right]. \quad (7.59)$$

Las integrales que aparecen en (7.58) y (7.59) se pueden evaluar numéricamente (\*). Procediendo de esta forma obtenemos:

1a) Para  $\beta m_R$  comprendido entre  $10^{-2}$  y 10,  $\delta m(\beta)$  es del orden de  $10^{-2}$  con un error de  $10^{-8}$ . En la figura 7.1 aparece dibujada la integral del lado derecho de (7.58) como función de  $\beta m_R$ . En la figura 7.2 representamos  $\delta m(\beta)$  frente a  $\beta m_R$ .

2a) Para  $\rho/m_R$  igual a  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$  y  $\beta m_R$  comprendido entre  $10^{-2}$  y 10,  $\delta_p m(\beta)$  vale cero con un error que en el peor de los casos es  $10^{-8}$ .

---

(\*) Todos los cálculos numéricos que contiene la presente memoria han sido realizados en el Centro de Cálculo de la Universidad Complutense de Madrid.

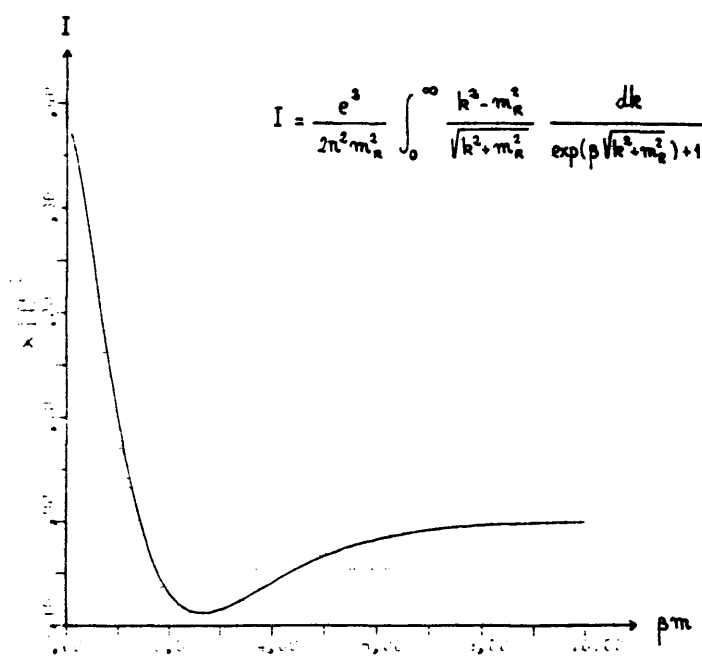


Figura 7.1

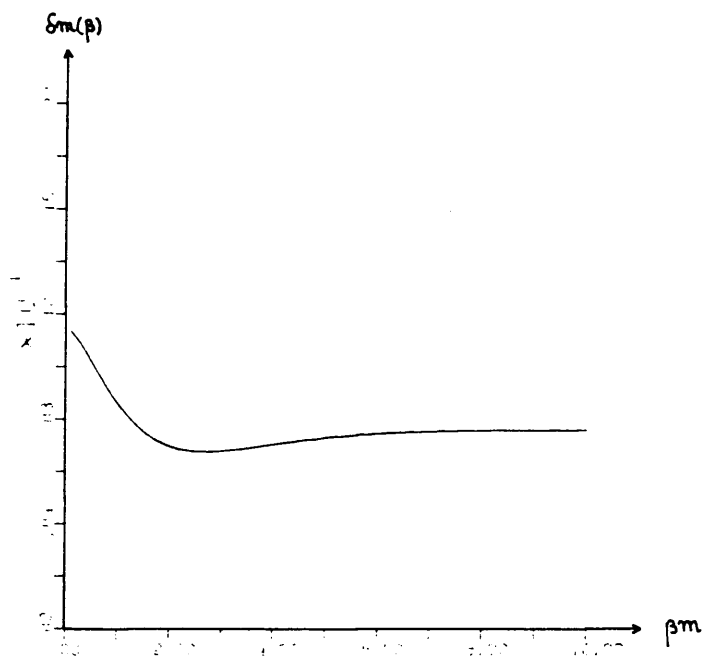


Figura 7.2

De estos dos resultados concluimos que para temperaturas altas la contribución principal a  $\delta m(\beta, \rho)$  viene dada por la parte independiente de  $\rho$ ,  $\delta m(\beta)$ . Así pues,

$$m_R(\beta, \rho) \simeq m_R + \frac{e^2}{12m_R\beta^2} + \frac{e^2}{2\pi^2m_R} \int_0^\infty dk \frac{k^2 - m_R^2}{k(m_R)} N_F(k), \quad \beta m_R \ll 1.$$

En cualquier caso este resultado es válido, salvo órdenes  $O(\rho)$ , para fermiones que se encuentran casi en reposo con respecto al



fluido pues basta usar (7.55). Utilizando

$$\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{-lz} \quad , \quad z > 0 \quad ,$$

la representación integral de las funciones de Bessel modificadas de segunda especie  $K_r(z)$

$$\int_0^{\infty} (x^2 - a^2)^{r-1} e^{-zx} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2a}{z} \right)^{r-1/2} \Gamma(r) K_{r-1/2}(az) \quad : \quad (a > 0, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} r > 0) \quad ,$$

sus propiedades y sus desarrollos para  $0 < z < 1$  [50] obtenemos

$$m_R(\beta, \rho) = m_R + \frac{e^2}{6m_R \beta^2} + \frac{3e^2 m_R}{8\pi^2} \left[ \ln \frac{\beta m_R}{4\pi} \right] \quad , \quad (7.60)$$

$$+ \frac{e^2 m_R}{2\pi^2} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) + \ln 2 \right] + O(\beta^2 m_R^2) \quad , \quad \beta m_R \ll 1 \quad ,$$

donde  $\gamma = 0.577215\dots$  es la constante de Euler.

La mayoría de los autores hacen la aproximación  $\delta m(\beta, \rho) = \delta m(\beta)$  sin justificación alguna y dan expresiones para  $m_R(\beta, \rho)$  a temperaturas altas.

#### Temperaturas bajas

Cuando la temperatura es baja,  $\beta m_R \gg 1$ , la contribución principal a  $m_R(\beta, \rho)$  proviene de las correcciones termodinámicas de

carácter fotónico. Los términos de carácter fermiónico, es decir, aquellos que en (7.53) contienen el factor  $N_F(k)$ , son de orden  $e^{-\beta m_R}$  con respecto a los anteriores. Así pues,

$$m_R(\beta) = m_R + \frac{e^2}{(2m_R\beta)} + O(e^{-\beta m_R}), \quad \beta m_R \gg 1. \quad (7.61)$$

Obsérvese que los términos fermiónicos de (7.53) son los que llevan dependencia en  $\rho$ , de aquí que (7.61) sea independiente de  $\rho$ . Nótese también que si tomamos el límite de temperatura cero ( $\beta m_R \rightarrow \infty$ ) obtenemos la masa renormalizada a temperatura nula  $m_R$ .

#### 7.6 MOMENTO MAGNETICO DEL ELECTRON A TEMPERATURA FINITA (I)

En la sección 7.3 calculamos el propagador fermiónico completo a orden  $e^2$ . Llamando  $u_\beta(p)$  al cuadriespinor de Dirac que describe un electrón a temperatura finita, y teniendo en cuenta que los electrones físicos están asociados a los campos de tipo 1, de (7.47) se sigue que

$$[\not{p} - m_R - \sum_n^{(R)} \Gamma_n(p)] u_\beta(p) = 0,$$

que a orden  $e^2$  se escribe

$$[\not{p} - m_R - \sum_n^{(R)} \Gamma_n(p^2 = m_R^2)] u_\beta(p) = 0. \quad (7.62)$$

De acuerdo con (7.34),

$$\sum_n^{(R)} \Gamma_n(p^2 = m_R^2) = (a_{11} + b_{11} \not{p} + c_{11} \not{u}) \not{p}^2 = m_R^2,$$

con  $a_{11}$ ,  $b_{11}$  y  $c_{11}$  dados por (7.35). De (7.49)-(7.51) y (7.35) obtenemos que

$$\sum_{11}^{(R)} (p^2 = m_R^2) = \sum_{11}^{(R,3)} (p^2 = m_R^2) = \left( a_{11,0}^{\beta} + b_{11,0}^{\beta} p + c_{11,0}^{\beta} \kappa \right) p^2 = m_R^2, \quad (7.63)$$

y, por tanto, que

$$\left[ p(1 - b_{11,0}^{\beta}) - c_{11,0}^{\beta} \kappa - m_R + a_{11,0}^{\beta} \right] p^2 = m_R^2 u_{\beta}(p) = 0. \quad (7.64)$$

La solución de esta ecuación es

$$u_{\beta}(p) = u(p(1 - b_{11,0}^{\beta}) - c_{11,0}^{\beta} \kappa - m_R + a_{11,0}^{\beta}) p^2 = m_R^2,$$

donde  $u(p,m)$  es el cuadriespino asociado a un electrón libre de momento  $p^{\nu}$  y masa  $m$  a temperatura nula.

En esta sección vamos a ver cómo afecta la autoenergía del electrón a su momento magnético. En la sección 9.4 evaluaremos la corrección debida al vértice.

La ecuación de Dirac para un electrón en interacción con un campo EM externo (clásico)  $A_{cl}^{\nu}$  es

$$(\not{p} - e \not{A}_{cl} - m) \psi = 0.$$

Si tenemos en cuenta los efectos que la interacción con el campo EM cuantificado tiene sobre la autoenergía del electrón, la anterior ecuación la hemos de sustituir por

$$[(1 - \Delta_2)(\not{p} - \Delta \mu \not{\alpha} - e \not{A}_{cl} - (m + \Delta m))] \psi_{\beta} = 0, \quad (7.65)$$

que describe un electrón inmerso en un baño a temperatura finita en interacción con un campo externo  $A_{C1}^V$ . En (7.65)  $\psi_\beta$  es el campo asociado al cuadri-spinor a temperatura finita  $u_\beta(p)$  de (7.64) y estamos usando la notación

$$\Delta m = a_{11,0}^\beta \Big|_{p^2=m_R^2}, \quad \Delta z = b_{11,0}^\beta \Big|_{p^2=m_R^2}, \quad \Delta \mu = c_{11,0}^\beta \Big|_{p^2=m_R^2}. \quad (7.66)$$

El tiempo invariante Lorentz  $x_\nu u^\nu$  lo vamos a denotar  $x_0^* = t^*$ . El cuadrivector  $(0, \vec{x}^*)$  será ortogonal al  $(t^*, 0)$  y tal que  $x_0^* x^{*0} = x_\nu x^\nu$ . Con esta notación la ecuación (7.65) la podemos escribir

$$i \frac{d\psi}{dt^*} = \left\{ \gamma^{*0} \vec{\gamma} \cdot [(1 - \Delta z) \vec{p}^* - e \vec{A}_{C1}^*] + \gamma^{*0} (m_R + \Delta m) + e \vec{A}_{C1}^* + \Delta z \vec{\xi} - \Delta \mu \right\} \psi_\beta. \quad (7.67)$$

Si consideramos el límite no relativista (i.e.,  $p = |\vec{p}^*| \ll m$ ), descomponemos  $\psi_\beta$  en componentes superiores e inferiores,  $\psi_\beta = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , y usamos la representación

$$\gamma^{*0} = \begin{pmatrix} 0_{2,1} & 0 \\ 0 & -0_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}^* = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

la ecuación (7.67) se nos desdobra en dos

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t^*} = \vec{\sigma} \vec{\pi}^* \chi + (e A_{el}^{o*} + \xi \Delta z + \Delta \mu + m_R + \Delta m) \psi, \quad (7.68)$$

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t^*} = \vec{\sigma} \vec{\pi}^* \psi + (e A_{el}^{o*} + \xi \Delta z + \Delta \mu - m_R - \Delta m) \chi,$$

donde  $\vec{\pi}^*$  es el trimomento cinético del electrón

$$\vec{\pi}^* = (1 - \Delta z) \vec{p}^* - e \vec{A}_u^*.$$

Introduciendo en (7.68) funciones  $\phi$  y  $\chi$  definidas como

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = e^{i \vec{p}^* \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} [m_R + \Delta m + \Delta \mu + \xi \Delta z] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t^*} = \vec{\sigma} \vec{\pi}^* \chi - e A_{el}^{o*} \phi,$$

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t^*} = \vec{\sigma} \vec{\pi}^* \phi + [e A_{el}^{o*} - 2(m_R + \Delta m)] \chi.$$

Si suponemos que  $e A_{el}^{o*} \ll 2(m_R + \Delta m)$  la solución aproximada de la segunda ecuación es

$$\chi \simeq \frac{\vec{\sigma} \vec{\pi}^*}{2(m_R + \Delta m)},$$

y la primera es la ecuación de Pauli

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{\sigma} \vec{\pi})^2}{2(m_R + \Delta m)} + e A_{cl}^{o*} \right] \Phi ,$$

que se puede escribir

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left\{ \frac{[(1-\Delta z)\vec{p} - e\vec{A}_{cl}^*]^2}{2(m_R + \Delta m)} - \frac{e}{2(m_R + \Delta m)} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e A_{cl}^{o*} \right\} \Phi . \quad (7.69)$$

En el caso particular de que  $u^V = (1, \vec{0})$  tenemos

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left\{ \frac{[(1-\Delta z)\vec{p} - e\vec{A}_{cl}^*]^2}{2(m_R + \Delta m)} - \frac{e}{2(m_R + \Delta m)} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e A_{cl}^{o*} \right\} \Phi .$$

La ecuación (7.69) nos dice que debido a la autoenergía del electrón el momento magnético del mismo pasa a ser, a orden  $e^2$ ,

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_R} \vec{\sigma} \left(1 - \frac{\Delta m}{m_R}\right) .$$

De (7.66), (7.15), (D.1) y (D.3) obtenemos

$$\Delta m = \frac{e^2 m_R}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k b_\pm(k)}{k(m_R)} \ln \left| \frac{k-p}{k+p} \right| ,$$

que para electrones no relativistas la podemos escribir

$$\Delta m = -\frac{e^2 m_R}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{N_F(k)}{k(m_R)} + O(p) ,$$

y, por tanto,

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_R} \vec{\sigma} \left[ 1 + \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{N_F(k)}{k(m_R)} \right] . \quad (7.70)$$

El segundo término del corchete del lado derecho es la corrección térmica al momento magnético debida a la autoenergía fermiónica.

## CAPITULO 8

### MASA DEL FOTON A TEMPERATURA FINITA

#### 8.1 INTRODUCCION

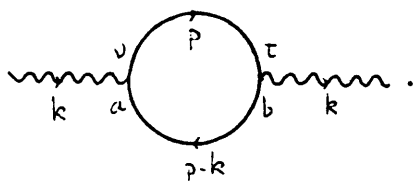
A temperatura finita el medio ya no es el vacío, sino que está lleno de fotones y fermiones. En la sección 2 demostraremos que, a orden  $e^2$ , las únicas divergencias del tensor de polarización de este medio son independientes de la temperatura y coinciden con las del tensor de polarización del vacío de la QED a temperatura nula. Tras eliminar estas divergencias con los mismos contratérminos que en la teoría a temperatura cero, construimos, ya en la sección 3, el propagador completo del fotón a orden  $e^2$ . En la cuarta sección evaluamos las longitudes de correlación de las partes longitudinal y transversal del campo EM, encontrando que ya no son infinitas, como ocurre a temperatura cero. También damos desarrollos a altas y bajas temperaturas para dichas longitudes de correlación.

#### 8.2 TENSOR DE POLARIZACION DEL FLUIDO

Ya hemos dicho que a temperatura finita el medio ya no es el vacío, sino que está lleno de fotones y fermiones. Por lo que el equivalente a temperatura finita del tensor de polarización del vacío le llamaremos tensor de polarización del fluido  $\Pi_{ab}^{\nu\tau}$ .



El diagrama de Feynman correspondiente al tensor de polarización del fluido a primer orden radiativo  $\Pi_{ab}^{\nu\tau}$  es



Las reglas de Feynman del capítulo 5 proporcionan

$$i\Pi_{ab}^{\nu\tau}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\nu S_{ab}(p) \gamma^\tau S_{ab}(p-k) \right], \quad (8.1)$$

o también,

$$\Pi_{ab}^{\nu\tau}(k) = \sum_{j=c}^2 \Pi_{ab}^{(j)\nu\tau}(k), \quad (8.2)$$

con

$$\Pi_{ab}^{(j)\nu\tau}(k) \equiv -\omega^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\nu (\not{p} + m) \gamma^\tau (\not{p} - \not{k} + m) \right] \mathcal{D}_{ab}^{j\beta}(p), \quad (8.3)$$

$$\mathcal{D}_{ab}^0(p) = S_{ab}^0(p) S_{ab}^0(p-k), \quad (8.4.a)$$

$$\mathcal{D}_{ab}^1(p) = S_{ab}^0(p) S_{ab}^1(p-k) + S_{ab}^1(p) S_{ab}^0(p-k), \quad (8.4.b)$$

$$\mathcal{D}_{ab}^{2A}(p) = S_{ab}^1(p) S_{ab}^1(p-k). \quad (8.4.c)$$

Los superíndices 0,  $\beta$  y 2 $\beta$  reflejan el número de factores termodinámicos  $n_F(p)$  y  $n_F(p-k)$  que contienen las integrales (8.3). De (5.48) y (5.48) obtenemos

$$\Pi_{11}^{(j\beta)\nu\tau}(k) = -\Pi_{22}^{(j\beta)\nu\tau*}(k), \quad \Pi_{12}^{(j\beta)\nu\tau}(k) = -\Pi_{21}^{(j\beta)\nu\tau*}(k), \quad (j=0,1,2), \quad (8.5)$$

donde la conjugación compleja no actúa sobre las matrices de Dirac.

Las ecuaciones (5.44) y (5.45) implican que las partes dependientes de  $\beta$ ,  $\Pi_{ab}^{(j\beta)\nu\tau}(k)$  ( $j=1,2$ ), del tensor de polarización convergen en el ultravioleta, y que las partes independientes de la temperatura  $\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k)$  y  $\Pi_{22}^{(0)\nu\tau}(k)$  divergen. Más aun, (5.44) y (5.45) dan para  $\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k)$  la misma expresión que para el tensor de polarización del vacío (a temperatura cero):

$$\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k) = -\Pi^0(k^2) (k^2 g^{\nu\tau} - k^\nu k^\tau),$$

$$\Pi^0(k^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( \frac{m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon}{\lambda^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon} \right),$$

a partir de la cual es inmediato obtener  $\Pi_{22}^{(0)\nu\tau}(k)$  usando (8.5).

Para eliminar las divergencias que contienen  $\Pi_{aa}^{\nu\tau}(k)$  ( $a=1,2$ ) redefinimos el campo EM como

$$A_a^{\nu} = Z_3^{-1/2}(\Lambda) A_a^{\nu},$$

$$Z_3(\Lambda) = \frac{1}{1 - \Pi^0(k^2 = \Lambda^2)} = 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right),$$

donde  $\Lambda$  es un "cut-off" ultravioleta, y añadimos a la densidad lagrangiana (5.40) el contratérmino

$$\delta \bar{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1,2} \tau_{aa} [Z_3(\Lambda) - 1] F_a^{R\mu\nu} F_{\mu\nu}^R.$$

Entonces, el tensor de polarización pasa a ser

$$\Pi_{ab}^{(R,\nu)\nu\tau}(k) = \sum_{j=0}^2 \Pi_{ab}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k), \quad (8.6)$$

con

$$\Pi_{ab}^{(R,0)\nu\tau}(k) = \Pi_{ab}^{(0,0)\nu\tau}(k) + \tau_{ab} [Z_3(\Lambda) - 1] (k^2 g^{\nu\tau} - k^\nu k^\tau) \quad (8.7)$$

$$\Pi_{ab}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) = \Pi_{ab}^{(j\beta)\nu\tau}(k) \quad (j=1,2), \quad (8.8)$$

donde  $\Pi_{ab}^{(j\beta)\nu\tau}(k)$  ( $j=0,1,2$ ) están dadas por (8.3).

Obsérvese que lo único que se ha hecho ha sido eliminar las divergencias ultravioletas añadiendo los mismos contratérminos que a temperatura cero, en total concordancia con lo dicho en la sección 6.2.

Por otro lado, las ecuaciones (8.5), (8.8) y (8.9) implican que

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) &= -\Pi_{22}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) \\ \Pi_{12}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) &= -\Pi_{21}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} j=0,1,2 \end{array} \right. , \quad (8.9)$$

que reduce al cálculo del tensor de polarización renormalizado

$\Pi_{ab}^{(R)\nu\tau}(k)$  a dos casos:  $a=b=1$  y  $a=1, b=2$ .

$a=b=1$

La parte independiente de la temperatura viene dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{(R,0)\nu\tau}(k) &= -\Pi^{(R,0)}(k^2) (k^\nu k^\tau - k^2 g^{\nu\tau}) , \\ \Pi^{(R,0)}(k^2) &= \Pi^0(k^2) - \Pi^0(0) . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Vamos estudiar la estructura de las correcciones termodinámicas  $\Pi_{ab}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k)$  ( $j=1,2$ ). La invariancia de la QED proporciona

$$k_\nu \Pi_{ab}^{(R,1)\nu\tau}(k) = 0 , \quad (8.11)$$

que junto con (8.10) implica que

$$k_\nu [\Pi_{ab}^{(R,\beta)\nu\tau}(k) + \Pi_{ab}^{(R,2\beta)\nu\tau}(k)] = 0 .$$

Por otro lado,  $\Pi_{ab}^{(R,\beta)\nu\tau}(k) + \Pi_{ab}^{(R,2\beta)\nu\tau}(k)$  es simétrico en sus ín-

indices  $\nu$  y  $\tau$ , de forma que debe ser una combinación lineal de  $g^{\nu\tau}$  y de los tensores simétricos de dos índices que se pueden construir a partir de los vectores  $k^\nu$  y  $u^\nu$ , a saber:  $k^\nu k^\tau$ ,  $u^\nu u^\tau$  y  $k^\nu u^\tau + u^\nu k^\tau$ . Los coeficientes de esta combinación lineal serán funciones de los escalares Lorentz

$$\omega \equiv ku \quad \text{y} \quad K^2 \equiv \omega^2 - k^2, \quad (8.12)$$

que pueden ser interpretados como energía y módulo al cuadrado del trimomento del fotón respecto al fluido. El resultado es

$$\Pi_{11}^{(R, \beta) \nu \tau}(k) = \Pi_{11}^{(L, \beta) \nu \tau}(k) = (\Pi_{11}^{L\beta} + \Pi_{11}^{L2\beta}) P^{\nu\tau} + (\Pi_{11}^{T\beta} + \Pi_{11}^{T2\beta}) Q^{\nu\tau}, \quad (8.13)$$

donde

$$\Pi_{11}^{Lj\beta} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \kappa^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \phi_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K=0 \\ 4\kappa^2 \frac{k^2}{K^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2p\mu(p\mu - \omega) - (p^2 m^2 + pk)] \phi_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K \neq 0 \end{cases} \quad (j=1,2), \quad (8.14)$$

$$\Pi_{11}^{Tj\beta} = \begin{cases} \Pi_{11}^{Lj\beta} & , \quad K=0 \\ -\frac{1}{2} \Pi_{11}^{Lj\beta} - 4\kappa^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \phi_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K \neq 0 \end{cases} \quad (j=1,2). \quad (8.15)$$

Los tensores  $P^{\nu\tau}$  y  $Q^{\nu\tau}$  han sido introducidos por Weldom [11],

$$P^{\nu\tau} = - \frac{1}{k^2 k'^2} (\omega k^\nu \cdot k'^2 u^\nu) (\omega k'^\tau \cdot k^2 u^\tau) , \quad (8.16)$$

$$Q^{\nu\tau} = g^{\nu\tau} - u^\nu u^\tau + \frac{1}{k^2} (k^\nu \cdot \omega u^\nu) (k'^\tau \cdot \omega u^\tau) , \quad (8.17)$$

y satisfacen

$$P_\sigma^\nu P_\tau^\sigma = P_\tau^\nu , \quad Q_\sigma^\nu Q_\tau^\sigma = Q_\tau^\nu ,$$

$$P_\sigma^\nu Q_\tau^\sigma = Q_\sigma^\nu P_\tau^\sigma = 0 ,$$

$$P^{\nu\tau} + Q^{\nu\tau} = g^{\nu\tau} - \frac{k^\nu k^\tau}{k^2} .$$

Nótese que cuando  $K=0$ ,  $k^\nu = \omega u^\nu$  y  $k^2 = \omega^2$ .

A continuación definimos

$$\Pi_{11}^L = -k^2 \Pi^{(R)0}(k^2) + \Pi_{11}^{L\beta} + \Pi_{11}^{L2\beta} , \quad (8.18)$$

$$\Pi_{11}^T = -k^2 \Pi^{(R)0}(k^2) + \Pi_{11}^{T\beta} + \Pi_{11}^{T2\beta} . \quad (8.19)$$

Entonces, de (8.6), (8.10) y (8.13) obtenemos

$$\Pi_{11}^{(R)\nu\tau}(k) = \Pi_{11}^L P^{\nu\tau} + \Pi_{11}^T Q^{\nu\tau} . \quad (8.20)$$

Como  $\Pi_{11}^L$  y  $\Pi_{11}^T$  son en general complejos,  $\Pi_{11}^{(R)\nu\tau}(k)$  también lo es.

a=1, b=2

Procediendo de forma análoga al caso a=b=1 llegamos a

$$\Pi_{12}^{(R) \nu \tau}(k) = \Pi_{12}^L p^{\nu \tau} + \Pi_{12}^T q^{\nu \tau}, \quad (8.21)$$

con

$$\Pi_{12}^L = \begin{cases} \frac{5}{3} e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\lambda m^2 - p^2 + p k) \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K=0 \\ -\frac{4}{3} e^2 \frac{k^2}{k^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2 p \mu (p \mu - \omega) - (p^2 - m^2) + p k] \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K \neq 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\Pi_{12}^T = \begin{cases} \Pi_{12}^L & , K=0 \\ -\frac{1}{2} \Pi_{12}^L + 4 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\lambda m^2 - p^2 + p k) \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K \neq 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

De (8.9), (8.20), (8.21), (8.16) y (8.17) se sigue que

$$\Pi_{11}^X = -\Pi_{22}^{X*}, \quad \Pi_{12}^X = -\Pi_{21}^{X*}, \quad (X=L, T). \quad (8.24)$$

### 8.3 EL PROPAGADOR DEL FOTON

El propagador del fotón renormalizado a primer orden radiativo  $\mathbb{D}_{ab}^{(R) \nu \tau}(k)$  viene dado por la serie que resulta de incluir reiteradamente el tensor de polarización  $i\Pi_{ab}^{(R) \nu \tau}(k)$  en el propaga-

dor libre, esto es,

$$\begin{aligned} D_{ab}^{(R) \nu \tau} = & D_{ab}^{\nu \tau} + \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} D_{ac}^{\nu \rho} (i \pi_{\rho \sigma}^{(R) cd}) D_{db}^{\sigma \tau} + \\ & + \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} \sum_{e=1,2} \sum_{f=1,2} D_{ac}^{\nu \rho} (i \pi_{\rho \sigma}^{(R) cd}) D_{de}^{\sigma \delta} (i \pi_{\delta \varepsilon}^{(R) ef}) D_{fb}^{\varepsilon \tau} + \dots \end{aligned}$$

Esta serie se puede sumar formalmente, obteniendo

$$D_{ab}^{(R) -1 \nu \tau}(k) = D_{ab}^{-1 \nu \tau}(k) - i \Pi_{ab}^{(R) \nu \tau}(k).$$

Si tenemos en cuenta que

$$D_{ab}^{-1 \nu \tau}(k) = i \tau_{ab} \left[ g^{\nu \tau} (k^2 - \lambda^2) - (1 - \frac{1}{\alpha}) k^\nu k^\tau \right] \quad (8.25)$$

podemos escribir

$$D_{ab}^{(R) -1 \nu \tau}(k) = i \tau_{ab} \left[ g^{\nu \tau} (k^2 - \lambda^2) - (1 - \frac{1}{\alpha}) k^\nu k^\tau \right] - i \Pi_{ab}^{(R) \nu \tau}(k). \quad (8.26)$$

El propagador completo viene dado por el inverso de esta expresión,

$$D_{ab}^{(R) \nu \tau}(k) = \frac{-i \tau_{ab}}{k^2 - \lambda^2} \left[ g^{\nu \tau} + (x-1) \frac{k^\nu k^\tau}{k^2 - \alpha \lambda^2} \right] - \frac{i p^{\nu \tau}}{(k^2 - \lambda^2) \tau_{ab} - \Pi_{ab}^L} \times$$



$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{\bar{\tau}_{ab} \pi_{ab}^L}{k^2 - \lambda^2} - \frac{(-1) \bar{\tau}_{ab} \pi_{12}^L \pi_{21}^L}{(k^2 - \lambda^2 - \pi_{11}^L)(k^2 - \lambda^2 - \pi_{22}^L) + \pi_{12}^L \pi_{21}^L} \right] - \frac{i \mathcal{A}^{\nu\tau}}{(k^2 - \lambda^2) \tau_{ab} - \pi_{ab}^T} \\
 & \times \left[ \frac{\bar{\tau}_{ab} \pi_{ab}^T}{k^2 - \lambda^2} + \frac{(-1) \bar{\tau}_{ab} \pi_{12}^T \pi_{21}^T}{(k^2 - \lambda^2 - \pi_{11}^T)(k^2 - \lambda^2 - \pi_{22}^T) + \pi_{12}^T \pi_{21}^T} \right] . \quad (8.27)
 \end{aligned}$$

Para terminar esta sección hagamos un último comentario. El propagador (8.27) satisface la identidad de WT (6.7):

$$k_\nu \mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu\tau}(k) = -\tau_{ab} \frac{i \alpha k^\tau}{k^2 - \alpha \lambda^2} = \alpha k^\tau \mathcal{D}_{ab}(k) ,$$

es decir, las partes longitudinales de los propagadores libre y completo coinciden.

#### 8.4 MASAS ELECTRICA Y MAGNETICA DEL FOTON A TEMPERATURA FINITA

La masa  $\lambda$  del fotón la introducimos en la densidad lagrangiana (5.40) para evitar las divergencias infrarrojas. Ahora bien, el tensor de polarización no presenta tales divergencias pues el momento interno del loop es fermiónico, por lo que en todas las expresiones de este capítulo podemos tomar  $\lambda=0$ .

En la QED a temperatura cero el alcance de la interacción EM es infinito ya que la masa de los fotones es nula. En esta sección vamos a ver que debido a los efectos de la temperatura dicho alcance se hace finito, y que varía según que el fotón

que promedia la interacción sea de género espacio, luz o tiempo.

Las masas eléctrica  $\lambda_e$  y magnética  $\lambda_m$  del fotón se definen como las inversas de las longitudes de correlación de las partes longitudinal y transversal del campo EM:

$$\lambda_e^2 \equiv \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 \equiv \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.28)$$

La presencia de  $\tau_{aa}$  en estas ecuaciones es debida a que en (8.27) aparecen  $k^2 \tau_{ab} - \Pi_{ab}^L$  y  $k^2 \tau_{ab} - \Pi_{ab}^T$ , y no  $k^2 - \Pi_{ab}^L$  y  $k^2 - \Pi_{ab}^T$ . Para fotones de género espacio tenemos

$$\lambda_e^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.29.e)$$

Para fotones de género luz,

$$\lambda_e^2 = \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 = \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.29.1)$$

Y para fotones de género tiempo,

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T, \quad (8.29.t)$$

pues si  $K=0$ ,  $\pi_{aa}^T = \pi_{aa}^L$ . Usando los resultados del apéndice E, ecuaciones (E.11)-(E.14) obtenemos

$$\lambda_e^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{m^2 + 2p^2}{p(m)} N_F(p) \quad , \quad \lambda_m = 0 \quad , \quad (k^2 < 0) \quad , \quad (8.30.e)$$

$$\lambda_e = 0 \quad , \quad \lambda_m^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \quad , \quad (k^2 = 0) \quad , \quad (8.30.1)$$

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \frac{2e^2}{3\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2(3m^2 + 2p^2)}{p^3(m)} N_F(p) \quad , \quad (k^2 > 0) \quad . \quad (8.30.t)$$

Vemos que efectivamente los alcances de las interacciones eléctrica y magnética (dados por  $\lambda_e^{-1}$  y  $\lambda_m^{-1}$ ) ya no son infinitos. En la figura 8.1 aparecen representados gráficamente los productos  $\beta\lambda$  frente a  $\beta m$  para valores de  $\beta m$  comprendidos entre  $10^{-2}$  y 10. Desarrollando las ecuaciones (8.30) para temperaturas altas,  $\beta m \ll 1$ , y bajas,  $\beta m \gg 1$ , llegamos a

$$\lambda_e^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{3\pi^2} - \frac{2e^2 m^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{4} + \ln 2 \right) + O(\beta^2 m^4) & , \quad \beta m \ll 1 \\ \frac{2e^2}{\pi^2} m \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \quad \beta m \gg 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda_m = 0 \quad , \quad (8.31.e)$$

$$\lambda_e = 0 \quad , \quad \lambda_m^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{5\pi^2} + \frac{e^2 m^2}{2\pi^2} \left[ \ln \frac{\pi m}{4\pi} + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \right] + O(\beta^2 m^4) & , \quad \beta m \ll 1 \\ \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \quad \beta m \gg 1 \end{cases} \quad , \quad (8.31.1)$$

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{4\beta^2} - \frac{e^2 m^2 \pi}{12\beta} + \frac{e^2 m^2}{3\pi^2} \left( \frac{3}{8} - \ln 2 \right) + O(\beta^2 m^4) & , \beta m \ll 1 \\ \frac{2e^2}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \beta m \gg 1 \end{cases}$$

(8.31.t)

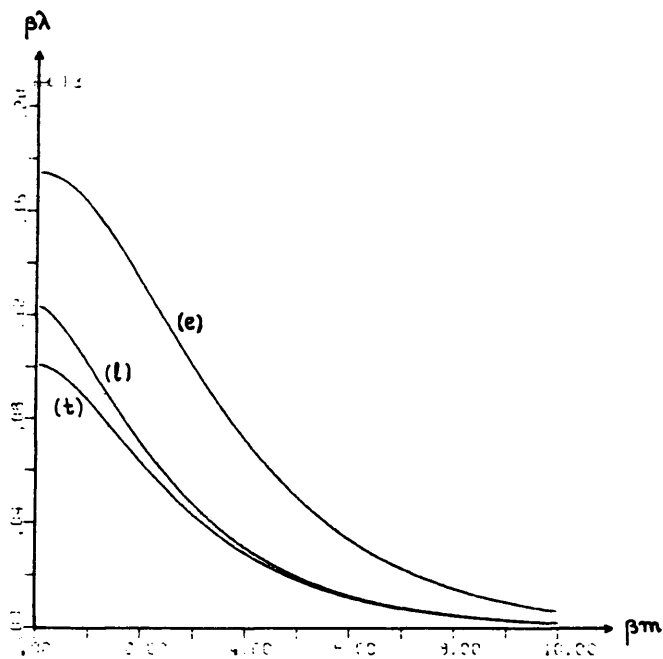


Figura 8.1

En el caso de temperaturas intermedias es necesario acudir a (8.30). Nótese que en el límite de temperaturas nulas ( $\beta m \rightarrow \infty$ ) se recupera el alcance infinito de la interacción EM.

Es importante destacar que los alcances de las interacciones eléctrica y magnética dependen de que el fotón que las media sea de género espacio, luz o tiempo.

Las expresiones de  $\lambda_e$  y  $\lambda_m$  para temperaturas bajas en una formulación no covariante habían sido obtenidas con anterioridad por Tarrach [10]. Las expresiones para temperaturas arbitrarias, ecuación (8.30), y su particularización para altas temperaturas, es, hasta donde nos es conocido, original.

El coeficiente de  $g^{\nu\tau}$  en  $D_{11}^{(R)\nu\tau}(k)$  es

$$\frac{-\lambda(k^2 + \pi_{22}^T)}{(k^2 - \pi_{44}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{42}^T \pi_{24}^T},$$

y en  $D_{22}^{(R)\nu\tau}(k)$ ,

$$\frac{i(k^2 - \pi_{44}^T)}{(k^2 - \pi_{44}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{42}^T \pi_{24}^T},$$

donde hemos tomado  $\lambda=0$ . Ambos denominadores se anulan cuando

$$(k^2 - \pi_{44}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{42}^T \pi_{24}^T = 0,$$

que a orden  $e^2$  se puede escribir

$$k^2 = \left( \pi_{44}^T - \frac{\pi_{42}^T \pi_{24}^T}{\pi_{22}^T} \right) \Big|_{k^2=0} \quad (8.32)$$

Ahora bien, de (8.22), (8.23), (8.4) y (5.44) se sigue que  $\pi_{12}^T$  y  $\pi_{21}^T$  están dados por integrales en  $p$  que contienen las deltas de Dirac  $\delta((p-k)^2 - m^2)$  y  $\delta(p^2 - m^2)$ . Pero si  $k^2=0$  es imposible que ambas integrales se satisfagan simultáneamente, por lo que

$$\pi_{42}^T(k^2=0) = \pi_{24}^T(k^2=0) = 0,$$

que junto con (E.14) y (8.24) implican que (8.32) se puede escribir

$$R^2 = \frac{1}{m^2} \frac{1}{\pi^2} = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{D^2 N_F(p)}{D(m)}. \quad (8.33)$$

Esto nos dice que si interpretamos el polo en  $k^2$  del coeficiente de  $g^{\nu\tau}$  en las componentes diagonales del propagador completo como la masa al cuadrado del fotón, entonces el fotón tiene una (masa)<sup>2</sup> dada por (8.33), toda ella de origen magnético.

## CAPITULO 9

### MOMENTO MAGNETICO DEL ELECTRON A TEMPERATURA FINITA

#### 9.1 INTRODUCCION

Al igual que en los dos capítulos anteriores, empezaremos mostrando en la sección 2 que, a temperatura finita, las divergencias ultravioletas son las mismas que a temperatura nula e independientes de  $\beta$ . Lo que va a permitir eliminar tales divergencias usando los mismos contratérminos que a temperatura cero. En la sección 9.3 construiremos la corriente fermiónica física completa, esto es, incluyendo correcciones radiativas de orden  $e^2$ . También probaremos que dicha corriente es invariante gauge, y mostraremos el papel fundamental que en esta prueba juega la autoenergía fermiónica. Por último, en la cuarta sección calcularemos las correcciones térmicas al momento magnético del electrón, dando sus desarrollos para temperaturas altas y bajas.

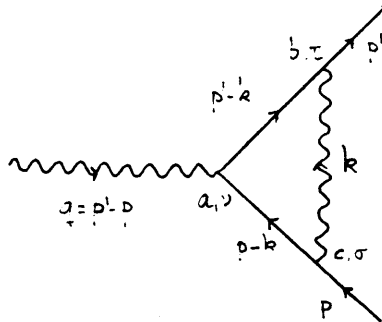
#### 9.2 RENORMALIZACION DEL VERTICE

En el capítulo 5 vimos que (a orden cero de teoría de perturbaciones) había un único vértice, cuyas patas podían ser todas de tipo 1 ó todas de tipo 2. De ahora en adelante vamos a caracterizar los vértices por tres letras abc, para así identificar la naturaleza 1 ó 2 de las líneas que entran o salen de él. Por ejemplo, a orden cero hay un solo vértice, el 111, que coincide con el 222 y está dado por  $-ie\gamma^\nu$ . A primer orden perturbativo tenemos

$$-ie\pi^{\nu}_{abc}(p',p) = -ie\gamma^{\nu}_{ab}\delta_{ac} = -ie\Lambda^{\nu}_{abc}(p,p), \quad (9.1)$$

con

$$-ie\Lambda^{\nu}_{abc}(p',p) = (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^{\nu}_{ba} S(p-k) \gamma^{\nu}_{ac} S(k) D^{\nu\sigma}_{cb}(k). \quad (9.2)$$



Las ecuaciones (5.48) y (5.49) implican que

$$\Lambda^{\nu}_{111}(p',p) = \Lambda^{\nu*}_{222}(p,p), \quad \Lambda^{\nu}_{112}(p',p) = \Lambda^{\nu*}_{221}(p,p),$$

$$\Lambda^{\nu}_{121}(p',p) = \Lambda^{\nu*}_{212}(p,p), \quad \Lambda^{\nu}_{211}(p',p) = \Lambda^{\nu}_{122}(p,p),$$

donde el complejo conjugado no afecta a las matrices de Dirac.



La ecuación (9.2) se puede escribir

$$\Lambda_{abc}^{(j\beta)\nu}(p', p) = \sum_{j=0}^3 \Lambda_{abc}^{(j\beta)\nu}(p', p), \quad (9.3)$$

con

$$\Lambda_{abc}^{(j\beta)\nu}(p', p) = -e^2 \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\tau(p' - k + m) \gamma^\nu(p - k + m) \gamma_\sigma V_{abc}^{(j\beta)\tau\sigma}(k) \quad (9.4)$$

y

$$V_{abc}^{(0)\tau\sigma}(k) = S_{ba}^0(p' - k) S_{ac}^0(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma}(k), \quad (9.5.a)$$

$$\begin{aligned} V_{abc}^{(1)\tau\sigma}(k) = & S_{ba}^0(p' - k) [S_{ac}^0(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma A}(k) + S_{ac}^B(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma 0}(k)] + \\ & + S_{ba}^B(p' - k) S_{ac}^0(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma 0}(k), \end{aligned} \quad (9.5.b)$$

$$\begin{aligned} V_{abc}^{(2B)\tau\sigma}(k) = & S_{ba}^B(p' - k) [S_{ac}^0(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma B}(k) + S_{ac}^B(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma 0}(k)] + \\ & + S_{ba}^0(p' - k) S_{ac}^B(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma B}(k), \end{aligned} \quad (9.5.c)$$

$$V_{abc}^{(3B)\tau\sigma}(k) = S_{ba}^B(p' - k) S_{ac}^B(p - k) D_{cb}^{\tau\sigma B}(k). \quad (9.5.d)$$

Sólamamente las partes independientes de la temperatura  $\Lambda_{aaa}^{(0)\nu}(p',p)$  divergen en el ultravioleta. Para eliminar estas divergencias se añade a la densidad lagrangiana el contratérmino

$$\delta\mathcal{L} = -e \sum_{a=1,2} [Z_1(\Lambda) - 1] \bar{\psi}_a^R \not{A}_a^R \psi_a^R ,$$

con  $Z_1(\Lambda) = Z_2(\Lambda)$  la constante de renormalización a temperatura nula. Entonces, los vértices renormalizados son

$$\Gamma_{abc}^{(R)\nu}(p',p) = \gamma^\nu \delta_{ab} \delta_{ac} + \Lambda_{abc}^{(R)\nu}(p',p) , \quad (9.6)$$

$$\Lambda_{abc}^{(R)\nu}(p',p) = \sum_{j=0}^3 \Lambda_{abc}^{(R,j)\beta\nu}(p',p) , \quad (9.7)$$

$$\Lambda_{abc}^{(R,j)\beta\nu}(p',p) = \Lambda_{abc}^{(j)\beta\nu}(p',p) - \Lambda_{aa}^{(0)\nu}(p,p) \Big|_{p^2=m^2} \delta_{ab} \delta_{ac} , \quad (9.8)$$

y satisfacen

$$\Lambda_{aa}^{(R)\nu}(p',p) = \Lambda_{22}^{(R)\nu*}(p',p) , \quad \Lambda_{aa}^{(R)\nu}(p',p) = \Lambda_{2a}^{(R)\nu*}(p',p) , \quad (9.9)$$

$$\Lambda_{aa}^{(R)\nu}(p',p) = \Lambda_{2a}^{(R)\nu*}(p',p) , \quad \Lambda_{aa}^{(R)\nu}(p',p) = \Lambda_{22}^{(R)\nu*}(p',p) .$$

### 9.3 INVARIANCIA GAUGE DE LA CORRIENTE FERMIONICA

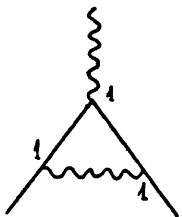
Vamos a empezar construyendo la corriente fermiónica física que contiene correcciones radiativas de primer orden. Dicha corriente será la suma de varios términos. El primero es la corriente a orden cero  $\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)$ , donde los cuadriespinares libres  $u(p)$  y  $\bar{u}(p')$  están asociados a campos físicos de tipo 1. La primera corrección radiativa que añadimos es la de la autoenergía de los fermiones. Para ello sustituimos los cuadriespinares  $u(p)$  y  $\bar{u}(p')$  por cuadriespinares a temperatura finita  $u_\beta(p)$  y  $\bar{u}_\beta(p')$ , cfr. ecuaciones (7.62)-(7.64):

$$J_F^\nu(p', p) = \bar{u}_\beta(p') \gamma^\nu u_\beta(p) \quad (9.10)$$

En segundo lugar añadimos la corrección debida al tensor de polarización del medio:

$$J_p^\nu(p', p) = [\Pi_{11}^{\nu\mu}(p'-p) D_{\tau\rho}^{\mu\nu}(p'-p) + \Pi_{12}^{\nu\mu}(p'-p) D_{\tau\rho}^{\mu\nu}(p'-p)] \bar{u}(p') \gamma^\nu u(p) \quad (9.11)$$

Por último, tenemos la corrección debida al vértice:



$$\rightarrow J_V^\nu(p', p) = \bar{\mu}(p') \Lambda_{44}^{(R)\nu}(p', p) \mu(p). \quad (9.12)$$

Así pues, la corriente fermiónica física está dada por

$$J^\nu(p', p) = J_F^\nu(p', p) + J_p^\nu(p', p) + J_V^\nu(p', p). \quad (9.13)$$

En esta sección vamos a demostrar que  $J^\nu(p', p)$  se conserva, es decir, que

$$(p' - p)_\nu J^\nu(p', p) = 0. \quad (9.14)$$

Para  $J_F^\nu(p', p)$ , de (9.10), (7.62) obtenemos que

$$(p' - p)_\nu J_F^\nu(p', p) = \bar{\mu}_p(p') \left[ \sum_M^{(R)} (p'^2 - m_p^2) - \sum_{44}^{(R)} (p^2 - m_p^2) \right] \mu_p(p). \quad (9.15)$$

A su vez, de (9.11) y (8.11) se sigue que

$$(p' - p)_\nu J_p^\nu(p', p) = 0. \quad (9.16)$$

Analicemos finalmente el producto de  $(p'-p)_\nu$  con  $J_\nu^{(R)}(p', p)$ , dada por (9.12). Por las propiedades de la QED a temperatura cero sabemos que

$$(p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{111}^{(R,0)\nu}(p', p) u(p) = 0. \quad (9.17)$$

De acuerdo con (9.4), (9.5.b) y (5.45), la parte dependiente de  $\alpha$  de la primera corrección termodinámica  $\bar{u}(p') \Lambda_{111}^{(R,\beta)\nu}(p', p) u(p)$  de (9.12) está dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \Lambda_{111,\alpha}^{(R,\beta)\nu}(p', p) u(p) &= -\bar{u}(p') e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \not{k} (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k} + m) \not{k} \\ &+ \left\{ \frac{1}{\lambda^2} [\delta(k^2 - \alpha\lambda^2) - \delta(k^2 - \lambda^2)] m_B(k) \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha - 1}{(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)(k^2 - \alpha\lambda^2 + i\epsilon)} \left[ \frac{\delta((p-k)^2 - m^2)}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} n_F(p-k) + \frac{\delta((p-k)^2 - m^2)}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} n_F(p'-k) \right] \right\} u(p). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Sumando y restando  $\not{p}' - m$  al  $\not{k}$  de la izquierda del integrando y  $\not{p} - m$  al de la derecha, multiplicando por  $(p'-p)_\nu$  y teniendo en cuenta que, a orden  $e^2$ ,  $e^2 \bar{u}(p') (\not{p} - \not{p}) u(p) = 0$  llegamos a que

$$(p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{111,\alpha}^{(R,\beta)\nu}(p', p) u(p) = 0.$$

Así pues, a  $(p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{111}^{(R,\beta)\nu}(p', p) u(p)$  sólo contribuye la parte de  $\Lambda_{111}^{(R,\beta)\nu}(p', p)$  independiente de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 (p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{44,0}^{(R,B)\nu} (p', p) u(p) = & - (p'-p)_\nu \bar{u}(p') 4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma^\nu \left[ (p'-k)(p-k) - \frac{k^2}{2} \right] + \right. \\
 & + (p'+p-k)^\nu \left[ k^2 - m^2 \right] \left\{ \frac{1}{(p'-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \delta(k^2 - \lambda^2) n_B(k) - \\
 & \left. - \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \left[ \frac{\delta((p'-k)^2 - m^2)}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} n_F(p'-k) + \frac{\delta((p-k)^2 - m^2)}{(p'-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} n_F(p-k) \right] \right\} u(p) .
 \end{aligned}$$

El término que en las primeras llaves va con  $\gamma^\nu$  da cero, pues, a orden  $e^2$ ,  $e^2 u(p') (\not{p}' - \not{p}) u(p) = 0$ . Para el resto obtenemos

$$\begin{aligned}
 (p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{44,0}^{(R,B)\nu} (p', p) u(p) = & \bar{u}(p') 2e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[ \frac{1}{-2p'k + i\varepsilon} - \frac{1}{-2pk + i\varepsilon} \right] \right. \\
 & \left. + \delta(k^2) n_B(k) - \frac{k+m}{k^2 + i\varepsilon} \left[ \delta(k^2 - 2p'k) n_F(p'-k) - \delta(k^2 - 2pk) n_F(p-k) \right] \right\} u(p) ,
 \end{aligned}$$

donde ya hemos tomado  $\lambda=0$ . Usando (7.11) podemos escribir

$$(p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{44,0}^{(R,B)\nu} (p', p) u(p) = \bar{u}(p') \left[ \sum_{44,0}^{(R,B)} (p^2 = m^2) - \sum_{44,0}^{(R,B)} (p^2 = m^2) \right] u(p) . \quad (9.19)$$

Análogamente, para las demás correcciones termodinámicas, obtenemos, para las partes dependientes de  $\alpha$ ,

$$\bar{u}(p') \Lambda_{44,\alpha}^{(R,jB)\nu} (p', p) u(p) = 0 \quad (j=2,3) , \quad (9.20)$$

y para las totales,

$$(p'-p)_\nu \bar{u}(p') \Lambda_{44}^{(R,jB)\nu} (p', p) u(p) = 0 \quad (j=1,2) . \quad (9.21)$$

De (9.12), (9.7), (9.17), (9.19), (9.21) y (7.63) se sigue que

$$(p^1 - p)_\nu J_\nu^\nu(p', p) = \bar{u}(p') \left[ \sum_{\mathcal{M}}^{(R)} (p^2 = m^2) - \sum_{\mathcal{M}}^{(R)} (p'^2 = m^2) \right] u(p). \quad (9.22)$$

Teniendo en cuenta que en esta ecuación, a orden  $e^2$ , se pueden sustituir  $u(p)$ ,  $\bar{u}(p')$  y  $m$  por  $u_{\mathcal{R}}(p)$ ,  $\bar{u}_{\mathcal{R}}(p')$  y  $m_{\mathcal{R}}$ , respectivamente, y usando (9.13), (9.15) y (9.16), llegamos a

$$(p^1 - p)_\nu J_\nu^\nu(p', p) = 0, \quad (9.14)$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Nótese que si no hubiésemos considerado la autoenergía de los fermiones, ecuación (9.10), la ecuación (9.14) no se verificaría, ya que su lado izquierdo sería igual al derecho de (9.22), que evidentemente es no nulo. Por otro lado, a partir de (9.6) y (9.22) obtenemos que

$$(p^1 - p)_\nu \bar{u}(p') T_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^{(R)\nu}(p', p) u(p) = \bar{u}(p') \left[ \not{p}' - \sum_{\mathcal{M}}^{(R)} (p'^2 = m^2) - \not{p} + \sum_{\mathcal{M}}^{(R)} (p^2 = m^2) \right] u(p),$$

que, usando (7.47), se puede escribir, a orden  $e^2$ ,

$$(p^1 - p)_\nu \bar{u}(p') T_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^{(R)\nu}(p', p) u(p) = \bar{u}(p') \lambda \left[ S_{\mathcal{M}}^{(R)-1}(p) - S_{\mathcal{M}}^{(R)-1}(p') \right] u(p),$$

que no es otra cosa que la identidad de WT (6.11) metida entre spinores  $\bar{u}(p')$  y  $u(p)$ , lo que muestra la consistencia de todo lo hecho hasta ahora.

#### 9.4 MOMENTO MAGNETICO DEL ELECTRON A TEMPERATURA FINITA (Y II)

En esta sección vamos a calcular el momento magnético del electrón. La contribución al momento magnético de la parte de la corriente asociada a la autoenergía fermiónica, ecuación (9.10), ya ha sido estudiada en la sección 7.6, ecuación (7.70). Recordemos que viene dada por

$$\vec{\delta\mu} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \frac{e^2}{n^2} \int_0^\infty dk \frac{N_F(k)}{k(m)} . \quad (9.23)$$

Nos falta, pues, evaluar las correcciones que proporcionan las partes de polarización del medio (9.11) y del vértice (9.12). Para ello tenemos que calcular sus contribuciones al factor de forma  $F_2$  cuando  $p^\nu = p'^\nu$ . Recordemos que  $F_2$  es el coeficiente de

$$\bar{u}(p') \frac{i}{2m} \sigma^{\nu\tau} (p'-p)_\tau u(p) \quad (9.24)$$

en la corriente fermiónica.

Usando (9.11), (8.20), (8.21), (8.16) y (8.17) vemos que  $J_p^\nu(p', p)$  no contiene ningún término que vaya con (9.24), por lo que su contribución a  $F_2$  es nula.

Utilizando (9.7), (9.20), que la parte dependiente de  $\alpha$  de  $\Lambda_{111}^{(R, \beta)\nu}(p', p)$  es proporcional a  $\gamma^\nu$ , tal y como muestra (9.18), (y, por tanto, no contribuye a  $F_2$ ), y las reglas de Feynman, la contribución a  $F_2$  de (9.12) viene de

$$\bar{u}(p') \Lambda_{111}^{(R, 0)\nu}(p', p) u(p) + J_V^{(\beta)\nu}(p', p) , \quad (9.25)$$



donde

$$J_v^{(8)\nu}(p', p) = -\bar{u}(p') \frac{e^2}{2n^3} \int d^4k f(p', p, k) \cdot \quad (9.26)$$

$$\cdot \left\{ \gamma^\nu \left[ (p'-k)(p-k) - \frac{k^2}{2} \right] + (p'+p-k)^\nu \not{k} - m k^\nu \right\} u(p)$$

y

$$f(p', p, k) = n_B(k) \delta(k^2) \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon} -$$

$$- \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \frac{\delta((p-k)^2 - m^2) n_F(p-k)}{(p'-k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\delta((p'-k)^2 - m^2) n_F(p'-k)}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \right. \quad (9.27)$$

$$\left. + 2\pi i n_F(p-k) n_F(p'-k) \delta((p-k)^2 - m^2) \delta((p'-k)^2 - m^2) \right\}.$$

En estas expresiones ya hemos tomado  $\lambda=0$ . Obsérvese que si el fotón de momento  $(p'-p)^\nu$  se encuentra sobre la capa de masas, i. e.,  $(p'-p)^2=0$ , entonces es imposible que  $(p-k)^2=(p'-k)^2=m^2$ , por lo que en tal caso el término que lleva dos factores termodinámicos  $n_F$  no contribuye a  $F_2$ . El primer sumando de (9.25) es precisamente la corrección renormalizada al vértice a temperatura cero, por lo que su contribución a  $F_2$  cuando  $p^\nu=p'^\nu$  es la que se encuentra en la literatura [47,49]:

$$F_2^{(4)}(p'=p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \cdot \quad (9.28)$$

En cuanto a (9.26), usando la identidad de Gordon, el  $k^\nu \gamma_\mu$  del integrando da lugar a  $\frac{1}{2m} k^\nu k^\tau \sigma_{\tau\rho} (p'-p)^\rho$ . Así pues, los términos que van con (9.24) y que, por ende, contribuyen a  $F_2$  provienen de

$$\bar{u}(p') \frac{1}{2m} \sigma_{\tau\rho} (p'-p)^\rho I^{\nu\tau} u(p) , \quad (9.29)$$

$$I^{\nu\tau} = \frac{e^2}{2\pi^3} \int d^4k \, k^\nu k^\tau f(p', p, k) \Big|_{p^2=p'^2=m^2} . \quad (9.30)$$

La integral  $I^{\nu\tau}$  será una combinación lineal de  $g^{\nu\tau}$  y de todos los tensores simétricos de dos índices que se pueden formar a partir de  $p^\nu$ ,  $p'^\nu$  y  $u^\nu$ :

$$\begin{aligned} I^{\nu\tau} = & A g^{\nu\tau} + B u^\nu u^\tau + C [(p^\nu - \xi u^\nu) u^\tau + u^\nu (p^\tau - \xi u^\tau)] + \\ & + D [(p^\nu - \xi u^\nu) u^\tau + u^\nu (p^\tau - \xi u^\tau)] + E (p^\nu - \xi u^\nu) (p^\tau - \xi u^\tau) + \\ & + F (p^\nu - \xi u^\nu) (p^\tau - \xi u^\tau) + G [(p^\nu - \xi u^\nu) (p^\tau - \xi u^\tau) + (p'^\nu - \xi u'^\nu) (p'^\tau - \xi u'^\tau)] . \end{aligned} \quad (9.31)$$

Al llevar (9.31) a (9.29) el término que va con (9.24) es

$$\bar{u}(p') \frac{1}{2m} \sigma^{\nu\tau} (p'-p)_\tau u(p) A ,$$

de donde se sigue que las correcciones termodinámicas al factor de forma  $F_2$  vienen dadas por el coeficiente A del desarrollo (9.31). Ahora bien, para evaluar el momento magnético nos interesa  $F_2$  cuando  $p^\nu = p'^\nu$ . Así pues, calculemos A para  $p^\nu = p'^\nu$ .

Si  $p^\nu = p^{\nu'}$ , la ecuación (9.31) se reduce a

$$I^{\nu\tau} = A q^{\nu\tau} + B u^\nu u^\tau + C [(p^\nu - \xi u^\nu) u^\tau + u^\nu (p^\tau - \xi u^\tau)] + E (p^\nu - \xi u^\nu) (p^\tau - \xi u^\tau).$$

Multiplicando ambos lados por  $g_{\nu\tau}$ ,  $u_\nu u_\tau$ ,  $(p_\nu - \xi u_\nu) u_\tau$  y  $(p_\nu - \xi u_\nu) \times (p_\tau - \xi u_\tau)$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 4A + B - p^2 E &= I_1 \\ A + B &= I_2 \\ -p^2 C &= I_3 \\ -p^2 A + p^4 E &= I_4 \end{aligned} \right\}.$$

donde

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= q_{\nu\tau} I^{\nu\tau} \\ I_2 &= u_\nu u_\tau I^{\nu\tau} \\ I_3 &= (p_\nu - \xi u_\nu) u_\tau I^{\nu\tau} \\ I_4 &= (p_\nu - \xi u_\nu) (p_\tau - \xi u_\tau) I^{\nu\tau} \end{aligned} \right\}, \quad (9.32)$$

con  $I^{\nu\tau}$  dada por (9.30) para  $p^\nu = p^{\nu'}$ . Resolviendo el sistema obtenemos para A

$$A = \frac{1}{2} (I_1 - I_2 + \frac{1}{p^2} I_4), \quad (9.33)$$

que usando los resultados del apéndice F, ecuación (F.8), se puede escribir para electrones no relativistas

$$A = -\frac{e^2}{36\beta^2 m^2} + o(\rho) . \quad (9.34)$$

Por tanto el factor de forma  $F_2$  cuando  $p = p'$  será la suma de la parte independiente de la temperatura (9.28) y la parte dependiente de  $\beta$  (9.34):

$$F_2(p=p) = \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{e^2}{36\beta^2 m^2} + o(\rho) .$$

Entonces, la corrección al momento magnético será la suma de las que proporcionan la autoenergía fermiónica y la parte del vértice a través de  $F_2(p'=p)$ . Para electrones no relativistas el momento magnético, a orden  $e^2$ , está dado por

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_R} \vec{\sigma} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{e^2}{36\beta^2 m_R^2} + \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{N_F(k)}{k(m_R)} \right\} . \quad (9.35)$$

En el caso de temperaturas bajas ( $\beta m \gg 1$ ) tenemos

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_R} \vec{\sigma} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{e^2}{36\beta^2 m^2} + e^2 O(e^{-\beta m}) \right\} ,$$

y en el de altas ( $\beta m \ll 1$ ),

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_R} \vec{\sigma} \left\{ 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} - \frac{e^2}{36\beta^2 m_R^2} - \frac{e^2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma + \ln \frac{\beta m}{4\pi} \right) + O(\beta^2 m^2) \right] \right\} .$$

Nuestros resultados son distintos de los de Fujimoto y Yee [51] y de los de Peressutti y Skagerstam [8]. Para temperaturas bajas su corrección térmica al momento magnético es el doble de la nuestra. Esta discrepancia la achacamos a la falta de covariancia en sus cálculos, lo que lleva a cuestionarse la validez de su identificación de  $F_2$ . Para el caso de temperaturas altas sólo evalúan el término dominante y obtienen  $-e^2/12\beta^2 m^2$ . Además de los argumentos que acabamos de exponer, hemos de añadir que los citados autores no consideran la autenergía fermiónica, que, según hemos visto en la sección 3 de este capítulo, es necesaria para que el vértice sea invariante gauge.

-165-

#### PARTE IV

LOS MODELOS DE SCHWINGER Y DE THIRRING A

TEMPERATURA FINITA

## CAPITULO 10

### EL MODELO DE SCHWINGER A TEMPERATURA FINITA

#### 10.1 INTRODUCCION

En los tres últimos capítulos hemos desarrollado cálculos perturbativos en QED (a temperatura finita). Ahora bien, sabemos que a temperatura cero existen modelos que admiten solución exacta; por ejemplo, el de Schwinger y el de Thirring. En esta última parte nos proponemos encontrar los propagadores completos para estos dos modelos cuando la temperatura es no nula. Para ello usaremos métodos funcionales. En este capítulo resolveremos el modelo de Schwinger, dejando el de Thirring para el siguiente.

Recordemos que se llama modelo de Schwinger a la QED en 1+1 dimensiones (una temporal y otra espacial) con fermiones de masa nula. En la sección 2 reduciremos el problema de la interacción de los fermiones con el campo EM cuántico a una interacción con un campo exterior (c-número). En la sección 10.3 encontraremos una solución exacta para el propagador fermiónico en dicho campo, la cual usaremos para encontrar una expresión explícita de la funcional generadora. En la cuarta sección, a partir de esta funcional, obtendremos los propagadores completos del fermión y del campo EM.

#### 10.2 LA FUNCIONAL GENERADORA DEL MODELO

En la sección 4.6 vimos que la funcional generadora para las

reglas de Feynman de la TFD se obtiene a partir de la funcional a temperatura cero haciendo las siguientes sustituciones. Las corrientes externas acopladas a los campos por dobletes térmicos de corrientes externas acopladas a dobletes térmicos de campos. Los propagadores por los propagadores térmicos. Y la densidad lagrangiana de interacción por la densidad lagrangiana térmica de interacción. Recuérdese que para bosones escalares de masa  $m$  interactuando mediante un potencial  $V(\phi)$  se tiene, ecuación (4.34),

$$\begin{aligned} Z[J_1, J_2] &= \mathcal{N}(\beta) \exp \left\{ -i \int d^4x \left( V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1} \right] - V \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2} \right] \right) \right\} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^4x d^4y J_a(x) \Delta^{ab}(x-y) J_b(y) \right\} \cdot \end{aligned}$$

donde  $-V(\phi_1) + V(\phi_2)$  es la densidad lagrangiana térmica de interacción. Una demostración del resultado antes mencionado, alternativa a la dada en la sección 4.6, se puede encontrar en Semenoff y Umezawa [52].

El modelo de Schwinger [53] es la particularización de la QED a una dimensión temporal y una espacial con fermiones de masa nula. Por tanto, su densidad lagrangiana térmica la obtenemos a partir de la de la QED, ecuación (5.40), haciendo  $m=0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{a=1,2} \left\{ \bar{\psi}_a \left[ -\frac{1}{4} F_a^{\nu\tau} F_{\nu\tau} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\nu A_a^\nu)^2 + (\partial^\nu \bar{\eta}_a)(\partial_\nu \eta_a) \right] + \right. \\ \left. + \psi_a \left( \frac{i}{2} \not{\partial} - e \not{A}_a \right) \psi_a \right\} \cdot \end{aligned} \quad (10.1)$$



donde ahora  $v, \tau=0,1$  y la masa del fotón la hemos tomado cero ( $\lambda=0$ ). En este modelo  $\epsilon$  tiene dimensiones de  $(\text{longitud})^{-1}$ .

Los propagadores libres de los fermiones, fotones y fantasmas, ( $S_{ab}(x-y)$ ,  $D_{ab}^{\nu\tau}(x-y)$  y  $\mathcal{L}_{ab}(x-y)$ , respectivamente), están dados por las versiones en 1+1 dimensiones de las ecuaciones (5.44), (5.45) y (5.46) con  $m=\lambda=0$ . La funcional generadora está dada por

$$Z[J_a, \bar{\xi}_a, \xi_a] = N(\beta) \exp \left\{ -\epsilon \sum_{a=1,2} \int d^2x \frac{\delta}{i\delta \bar{\xi}_a(x)} \left( \frac{\delta}{i\partial_\mu^\nu(x)} \frac{\delta}{i\delta \xi_a(x)} \right) \right\} \cdot$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y [J_a^\nu(x) D_{\nu\tau}^{ab}(x-y) J_b^\tau(y) + 2\bar{\xi}_a(x) S_{ab}(x-y) \xi_b(y)] \right\}.$$

(10.2)

La parte de los fantasmas no la hemos escrito ya que éstos evolucionan libremente sin interactuar con ningún otro campo.

Recordemos tres propiedades de las integrales funcionales, válidas en cualquier dimensión, [54]:

$$(P1) \quad \exp \left\{ -i \int dx dy \frac{\delta}{\delta \xi(x)} A(x,y) \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}(y)} \right\} \exp \left\{ i \int dx dy \bar{\xi}(x) B(x,y) \xi(y) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ i \int dx dy \bar{\xi}(x) \bar{B}(x,y) \xi(y) \right\} \exp L,$$

donde  $\bar{B} = B(1+AB)^{-1}$  es la solución para  $s=1$  de la ecuación integral

$$\bar{B}_s(x,y) = B(x,y) + s \int dz_1 dz_2 B(x,z_1) A(z_1,z_2) \bar{B}_s(z_2,y)$$

y

$$L = \text{tr}(\ln(1+AB)) = \text{tr} \int_0^1 ds \int dx dy A(x,y) \bar{B}_s(x,y).$$

$$\begin{aligned} (P2) \quad & F\left[\frac{\bar{C}}{i\bar{C}J(x)}\right] \exp\left\{\frac{i}{2} \int dx dy J(x) C(x,y) J(y)\right\} = \\ & = \exp\left\{\frac{i}{2} \int dx dy J(x) C(x,y) J(y)\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx dy \frac{\bar{C}}{iA(x)} C(x,y) \frac{\bar{C}}{iA(y)}\right\} F[A], \end{aligned}$$

con  $A(x)$  dada por

$$A(x) = \int dy C(x,y) J(y).$$

$$\begin{aligned} (P3) \quad & \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx dy \frac{\bar{C}}{iJ(x)} A(x,y) \frac{C}{iJ(y)}\right\} \exp\left\{\frac{i}{2} \int dx dy J(x) B(x,y) J(y)\right\} + \\ & + i \int dx F(x) J(x) = \exp\left\{\frac{i}{2} \int dx dy J(x) [B(1-AB)^{-1}](x,y) J(y) + \frac{1}{2} \text{tr}(\ln(1-AB))^{-1} + \right. \\ & \left. + i \int dx dy J(x) (1-BA)^{-1}(x,y) F(y) + \frac{i}{2} \int dx dy F(x) [A(1-BA)^{-1}](x,y) F(y)\right\}. \end{aligned}$$

Usando las propiedades (P1) y (P2) podemos escribir (10.2) en la forma

$$Z[J_a, \bar{\xi}_a, \xi_a] = i^{1/2} \exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y J_a^\nu(x) D_{\nu\tau}^{ab}(x-y) \bar{J}_b^\tau(y)\right\} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^4x d^4y \frac{\bar{\psi}}{\delta A_a^\nu(x)} D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \frac{\xi}{\delta A_b^\tau(y)} \right\} \cdot \\
 & \cdot \exp \left\{ - \sum_{a,b=1,2} \int d^4x d^4y \bar{\xi}_a(x) G_{ab}(x,y|eA) \xi_b(y) + L[A] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{10.3}$$

donde  $A_a^\nu(x)$  es el doblete térmico de campos externos

$$A_a^\nu(x) = \sum_{b=1,2} \int d^4y i D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) J_\tau^b(y), \tag{10.4}$$

$G_{ab}(x,y|eA)$  es la solución de la ecuación integral

$$G_{ab}(x,y|eA) = S_{ab}(x-y) - ie \sum_{c=1,2} \int d^4z S_{ac}(x-z) A_c(z) G_{cb}(z,y|eA)
 \tag{10.5}$$

y  $L[A]$  es la funcional de "loops" fermiónicos

$$L[A] = -i \sum_{a=1,2} \int_0^1 d\epsilon' \int d^4x \text{tr} A_a(x) G_{aa}(x,x|\epsilon' A). \tag{10.6}$$

Los campos  $A_a^\nu(x)$  de (10.4) son externos en el sentido de que son c-números. Precisamente, al pasar de (10.2) a (10.3), lo que hemos hecho ha sido sustituir la interacción de los fermiones con el campo EM dinámico por una interacción con unos potenciales externos dados por (10.4). La presencia de  $L[A]$  en (10.3) pone de manifiesto que los "loops" fermiónicos cerrados son tenidos en cuenta de todas las formas posibles. El propaga

dor de los fermiones que interaccionan con los campos EM externos es  $G_{ab}(x,y|eA)$ .

La expresión (10.2) para la funcional generadora es exacta y completa en el sentido de que un desarrollo en serie de potencias de la constante de acoplamiento proporciona todas las contribuciones perturbativas a cualquier función de Green. Al pasar a (10.3) hemos reagrupado los términos de esta serie en clases distintas de diagramas de Feynman, de tal forma que en cualquier diagrama se pueden distinguir las partes de "loops" fermiónicos.

Todo lo que hemos hecho hasta aquí es válido en dimensión arbitraria y con cualquier masa para los fermiones. Lo característico de 1+1 dimensiones y fermiones de masa nula es que en este caso la ecuación integral (10.5) tiene solución exacta, de forma que se puede evaluar la funcional de loops fermiónicos  $L[A]$  de (10.6), y así conocer todo lo que aparece en (10.3). En otra dimensión, (10.5) sólo se sabe resolver perturbativamente, y entonces (10.3) no presenta ventajas frente a (10.2).

### 10.3 LA FUNCIONAL DE LOOPS FERMIONICOS

En esta sección vamos a resolver la ecuación (10.5) y a usar su solución para evaluar la funcional de "loops" fermiónicos  $L[A]$ , dada por (10.6).

Actuando sobre ambos lados de (10.5) con  $i\cancel{\partial} - e\cancel{A}_a$  y usando la versión en 1+1 dimensiones de (5.33.g) con  $m=0$  obtenemos

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A}_a)G_{ab}(x,y|eA) = i\tilde{C}_{ab}\tilde{C}^{ab}(x-y). \quad (10.7)$$

Para esta ecuación diferencial buscamos una solución del tipo

$$G_{ab}(x,y;A) = \exp\{i[\phi_a(x) - \phi_b(y)]\} S_{ab}(x-y), \quad (10.8)$$

donde

$$\phi_a = \int_V d^3x f_a^{v\tau},$$

y  $f_a^{v\tau}$  son funciones arbitrarias de  $x$ . Recordando que en 1+1 dimensiones

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\tau\} = 2\gamma^\nu g^{\tau\rho},$$

es inmediato ver que

$$[\partial^\nu \phi_a(x), \phi_a(x)] = 0. \quad (10.9)$$

Llevando (10.8) a (10.7) y usando (10.9) y (5.33.g) en 1+1 dimensiones y con  $m=0$  obtenemos la siguiente ecuación para  $\phi_a$ :

$$\square \phi_a(x) = -\tilde{\not{A}}_a(x), \quad (10.10)$$

en la que  $A_a^\nu(x)$  es un c-número dado por (10.4), de forma que  $-\not{A}_a(x)$  juega el papel de una fuente externa. La solución de (10.10) es

$$\phi_{ab}(x) = i \sum_{b=1,2} \int d^2y \delta_{ab}(x-y) \bar{\psi}_{bb}(y) \psi_{bb}(y) . \quad (10.11)$$

donde  $\delta_{ab}(x-y)$  está dada por la versión en 1+1 dimensiones de la (5.46) con  $\lambda=0$ .

Así pues, la solución de (10.5) es (10.8) y (10.11). El siguiente paso es usar esta solución para evaluar la funcional de loops fermiónicos (10.6). Ahora bien, al hacer esto, aparece una dificultad y es que el propagador  $G_{aa}(x,y|eA)$  es singular cuando  $y \rightarrow x$ . Para regularizar  $L[A]$ , en primer lugar, escribimos (10.6) como

$$L[A] = - \sum_{a=1,2} \int_0^e dx' \int d^2x A_a^\nu(x) \langle J_\nu^a(x) \rangle ,$$

ya que, según el carácter cíclico de la traza,

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \text{tr} \int^\nu G_{aa}(x,y|eA) = \lim_{x,y \rightarrow 0} \text{tr} \langle \alpha(p) | i \bar{\psi}_a(y) \gamma^\nu \psi_a(x) | \alpha(p) \rangle = \langle J_\nu^a(x) \rangle ,$$

y, en segundo lugar, usamos el método "point-splitting" para redefinir la corriente como

$$J_\nu^a(x) = \lim_{\substack{x,y \rightarrow 0 \\ (x-y)^2 < 0}} i \bar{\psi}_a(y) \gamma^\nu \psi_a(x) \exp \left\{ ie \int_y^x dz_\tau A_\tau^a(x) \right\} ,$$

con lo que la funcional de loops fermiónicos se transforma en

$$L[A] = -i \sum_{a=1,2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \lim_{\substack{x-y \rightarrow 0 \\ (x-y)^2 < 0}} G_{aa}(x,y) e^{iA} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ i \int_y^x dz A_a^T(z) \right\}. \quad (10.12)$$

En estas expresiones el límite  $x-y \rightarrow 0$  debe ser tomado simétricamente y de tal forma que conserve la causalidad, es decir,  $(x-y)^2 < 0$ .

Llevando (10.8) a (10.12) obtenemos

$$L[A] = -i \sum_{a=1,2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \lim_{\substack{x-y \rightarrow 0 \\ (x-y)^2 < 0}} \exp \left\{ i \epsilon [\phi_a(x) - \phi_a(y)] \right\} \cdot \\ \cdot S_{ab}(x-y) \exp \left\{ i \int_y^x dz A_a^T(z) \right\}. \quad (10.13)$$

Ahora bien, de (5.33.a), (5.33.e), (5.33.c) y (5.33.f) se sigue que en 1+1 dimensiones y con  $m=0$

$$S_{aa}(x-y) = \frac{i \tau_{aa}}{2\pi} \frac{(x-y)^{\nu} \gamma_{\nu}}{(x-y)^2 \cdot i \tau_{aa} \epsilon} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k^{\nu} \delta(k^2)}{\epsilon \beta(|k_0| - |k|)_{+1}} e^{-ik(x-y)}. \quad (10.14)$$

Cuando  $x-y \rightarrow 0$  el segundo término del lado derecho tiende a cero, al igual que las dos exponenciales que aparecen en el integrando de (10.13), por lo que sólo contribuirá el primer sumando de (10.14):

$$L[A] = -i \sum_{a=1,2} \int d^2x \operatorname{tr} A_a(x) \lim_{\substack{x,y \rightarrow 0 \\ (x-y)^2 < 0}} \{ 1 + i e' (x-y)_\nu \partial^\nu \phi_a(x) \} \cdot$$

$$\cdot \frac{e'^2}{2\pi} \frac{(x-y)_\nu \partial^\nu}{(x-y)^2 - i\epsilon} \{ 1 + i e' (x-y)_\nu A_a^\nu(x) \} \cdot \quad (10.15)$$

Al tomar el límite simétricamente tenemos

$$\lim_{\substack{x,y \rightarrow 0 \\ (x-y)^2 < 0}} \frac{(x-y)_\nu \partial^\nu}{(x-y)^2 - i\epsilon} = 0. \quad (10.16)$$

Por otro lado, la causalidad la garantizamos haciendo  $x_0 = y_0$  y  $x_1 - y_1 \rightarrow 0$ . Tomando el límite de esta forma y teniendo en cuenta (10.16) llegamos a

$$L[A] = -i \frac{e^2}{4\pi} \sum_{a=1,2} \tau_{aa} \int d^2x \operatorname{tr} A_a(x) [\partial^\mu \phi_a(x) + A_a^\mu(x)]^2,$$

que, usando

$$\operatorname{tr} [\partial^\mu \phi_a(x) + A_a^\mu(x)]^2 =$$



$$= 2 \left\{ q^{\mu\nu} A_a^\tau(x) + i \epsilon_{(n)}^\tau \sum_{b=1,2} \int d^4y \, t_{ab}(x-y) \bar{t}_{bb} \left[ \partial_{(y)}^\nu A_b^\rho(y) - \partial_{(y)}^\rho A_b^\nu(y) + g^{\mu\rho} \partial_{(y)}^\tau A_b^\mu(y) \right] \right\},$$

se puede escribir

$$L[A] = \frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^4x d^4y \, A_a^\nu(x) \Pi_{\nu\tau}^{ab}(x-y) A_b^\tau(y), \quad (10.17)$$

donde

$$\Pi_{ab}^{\nu\tau}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Pi_{ab}^{\nu\tau}(k), \quad (10.18.a)$$

$$\Pi_{ab}^{\nu\tau}(k) = \frac{e^2}{\pi} \left[ q^{\nu\tau} t_{ab} - i k^\nu k^\tau t_{aa} t_{ab}(k) t_{bb} \right]. \quad (10.18.b)$$

Resumiendo, la funcional generadora  $Z[J_a, \xi_a, \bar{\xi}_a]$  está dada por (10.3). Todos los objetos que contiene poseen expresiones explícitas conocidas. Los campos externos (c-números)  $A_a^\nu(x)$  están dados por (10.4), el propagador  $G_{ab}(x,y|eA)$  por (10.8) y (10.11), y la funcional de loops fermiónicos  $L[A]$  por (10.17) y (10.18). Entonces, mediante derivación logarítmica de  $Z[J_a, \xi_a, \bar{\xi}_a]$  con respecto a las fuentes externas  $J_a, \xi_a$  y  $\bar{\xi}_a$ , podemos obtener expresiones compactas para los propagadores completos.

#### 10.4 LOS PROPAGADORES COMPLETOS DEL CAMPO EM Y DEL FERMION

En esta sección vamos a encontrar expresiones compactas para los propagadores exactos del campo EM y del fermión. Empezaremos por el del campo EM.

De las ecuaciones (10.3), (10.4) y (10.17) obtenemos que

$$\begin{aligned} Z[J_a, \bar{\xi}_a = \bar{\xi}_a = 0] &= N(\beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y J_a^\nu(x) D_{\nu\tau}^{ab}(x-y) J_b^\tau(y) \right\} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta A_a^\nu(x)} D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \frac{\delta}{\delta A_b^\tau(y)} \right\} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y A_a^\nu(x) \Pi_{\nu\tau}^{ab}(x-y) A_b^\tau(y) \right\}. \end{aligned}$$

Usando la propiedad (P3) de la sección 1 de este capítulo (con  $F=0$ ) podemos escribir que

$$\begin{aligned} Z[J_a, \bar{\xi}_a = \bar{\xi}_a = 0] &= Z[J_a = \bar{\xi}_a = \bar{\xi}_a = 0] \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y J_a^\nu(x) D_{\nu\tau}^{ab}(x-y) J_b^\tau(y) \right\}, \end{aligned} \quad (10.19)$$

donde  $Z[J_a = \bar{\xi}_a = \bar{\xi}_a = 0]$  es una constante dependiente de  $\beta$ ,

$$\Xi[J_a = \xi_a = \bar{\xi}_a = 0] = \mathcal{N}'(g) \mathcal{N}''(g), \quad (10.20)$$

$$\mathcal{N}'(g) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left[ g^{\mu\nu} \delta_{ab} - \sum_{c=1,2} i \pi_{ac}^{\nu\rho} D_{\rho}^{\tau}{}_{cb} \right]^{-1} \right\},$$

y el propagador térmico completo  $D_{ab}^{\nu\tau}(x-y)$  del campo EM está dado, en notación matricial, por

$$(D_{ab}^{\nu\tau})(x-y) = (D_{ab}^{\nu\tau})(x-y) + (D_{ab}^{\nu\rho})(D_{\rho\sigma}^{ab})(D_{ab}^{\sigma\tau})(x-y),$$

$$(D_{ab}^{\nu\tau})(x-y) = - (i \pi_{ab}^{\nu\rho}) \left[ (g_{\rho\tau} \delta_{ab}) - (D_{\rho\sigma}^{ab})(i \pi_{\tau ab}^{\sigma}) \right]^{-1}(x-y),$$

o, equivalentemente, por

$$(D_{ab}^{\nu\tau})(x-y) = \left[ (D_{ab}^{\nu\tau})^{-1} - (i \pi_{ab}^{\nu\tau}) \right]^{-1}(x-y). \quad (10.21)$$

Introduciendo en esta última ecuación (8.25), (10.18) y (5.46) con  $\lambda=0$  llegamos a que

$$D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} D_{ab}^{\nu\tau}(k), \quad (10.22.a)$$

$$(D_{ab}^{\nu\tau})(k) = (U^B) (D_{ab}^{\nu\tau 0})(k) (U^B), \quad (10.22.b)$$

$$\mathbb{D}_{11}^{\nu\tau 0}(k) = \mathbb{D}_{22}^{\nu\tau 0}(k) = \frac{-i}{k^2 - \frac{e^2}{\pi} - i\epsilon} \left( g^{\nu\tau} - \frac{k^\nu k^\tau}{k^2 + i\epsilon} \right) - i\alpha \frac{k^\nu k^\tau}{(k^2 + i\epsilon)^2}, \quad (10.22.c)$$

$$\mathbb{D}_{12}^{\nu\tau 0}(k) = \mathbb{D}_{21}^{\nu\tau 0}(k) = 0, \quad (10.22.d)$$

con la matriz  $(U^B)$  dada por (5.45.d). Las ecuaciones (5.45.b) con  $\lambda=0$  y (10.22.b) nos dicen que el propagador libre y el completo tienen la misma estructura. Las partes longitudinales de ambos propagadores coinciden, lo que concuerda con lo dicho en la sección 6.3. Y la parte transversal ha adquirido una masa igual a  $e/\sqrt{\pi}$ . Esta masa es independiente de la temperatura y coincide con la obtenida por Schwinger a temperatura cero. Toda la dependencia del propagador con  $\beta$  va dentro de los factores termodinámicos  $\sinh\theta_B(\beta)$  y  $\cosh\theta_B(\beta)$  que proporciona la matriz  $(U^B)$ . El propagador para el campo EM físico (de tipo 1) es

$$\mathbb{D}^{\nu\tau}(x-y) = \frac{\delta^2 \ln Z[J_a, \bar{\xi}_a = \xi_a = 0]}{\delta J_\nu^1(x) \delta J_\tau^1(y)} \Big|_{J_a=0} = \mathbb{D}_{11}^{\nu\tau}(x-y).$$

Vamos a calcular ahora el propagador completo del fermión. Usando

$$S_{ab}(x-y) = \frac{\delta^2 \ln Z[J_a, \bar{\xi}_a, \xi_a]}{\delta \bar{\xi}_a(x) \delta \xi_b(y)} \Big|_{J_a = \bar{\xi}_a = \xi_a = 0}$$

y las ecuaciones (10.3), (10.8), (10.11) y (10.17) obtenemos

$$\begin{aligned}
 S_{ab}(x-y) = & \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta A_a^\nu(x)} D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \frac{\delta}{\delta A_b^\tau(y)} \right\} \cdot \\
 & \times \exp \left\{ -ie \sum_{c=1,2} \int d^2z [\mathcal{D}_{ac}(x-z) - \mathcal{D}_{bc}(y-z)] \bar{\tau}_c \mathcal{Z}_{(2)} \mathcal{K}_c(z) \right\} S_{ab}(x-y) \frac{1}{\mathcal{N}(\beta)} \cdot \\
 & \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y A_a^\nu(x) \Pi_{\nu\tau}^{ab}(x-y) A_b^\tau(y) \right\} \Big|_{A_a=0},
 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{N}(\beta)$  está dada por (10.20). Utilizando ahora la propiedad (P3) de la sección 10.1 llegamos a

$$\begin{aligned}
 S_{ab}(x-y) = & \exp \left\{ -\frac{e^2}{2} \sum_{c,d=1,2} \int d^2z_1 d^2z_2 f_{ab,c}^\nu(x,y,z_1) D_{\nu\tau}^{cd}(z_1-z_2) \bar{\tau}_{ab,d}(x,y,z_2) \right\} \cdot \\
 & \cdot S_{ab}(x-y),
 \end{aligned} \tag{10.23}$$

con

$$f_{ab,c}^\nu(x,y,z) = -ie \sum_{d=1,2} [\mathcal{D}_{ad}(x-z) - \mathcal{D}_{bd}(y-z)] \bar{\tau}_{dc} \gamma^\nu \tag{10.24}$$

Los superíndices 0,  $\beta$  y 2 $\beta$  reflejan el número de factores termodinámicos  $n_F(p)$  y  $n_F(p-k)$  que contienen las integrales (8.3). De (5.48) y (5.48) obtenemos

$$\prod_{11}^{(j\beta)\nu\tau}(k) = - \prod_{22}^{(j\beta)\nu\tau}(k)^* , \quad \prod_{11}^{(j\beta)\nu\tau}(k) = - \prod_{21}^{(j\beta)\nu\tau}(k)^* , \quad (j=0,1,2) ,$$

(8.5)

donde la conjugación compleja no actúa sobre las matrices de Dirac.

Las ecuaciones (5.44) y (5.45) implican que las partes dependientes de  $\beta$ ,  $\Pi_{ab}^{(j\beta)\nu\tau}(k)$  ( $j=1,2$ ), del tensor de polarización convergen en el ultravioleta, y que las partes independientes de la temperatura  $\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k)$  y  $\Pi_{22}^{(0)\nu\tau}(k)$  divergen. Más aun, (5.44) y (5.45) dan para  $\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k)$  la misma expresión que para el tensor de polarización del vacío (a temperatura cero):

$$\Pi_{11}^{(0)\nu\tau}(k) = - \Pi^0(k^2) (k^2 g^{\nu\tau} - k^\nu k^\tau) ,$$

$$\Pi^0(k^2) = - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( \frac{m^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon}{\Lambda^2 - x(1-x)k^2 - i\epsilon} \right) ,$$

a partir de la cual es inmediato obtener  $\Pi_{22}^{(0)\nu\tau}(k)$  usando (8.5).

Para eliminar las divergencias que contienen  $\Pi_{aa}^{\nu\tau}(k)$  ( $a=1,2$ ) redefinimos el campo EM como

$$A_a^{R\nu} = \Xi_3^{-1/2}(\Lambda) A_a^\nu ,$$

$$Z_3(\Lambda) = \frac{1}{1 - \Pi^0(k^2=0)} = 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right),$$

donde  $\Lambda$  es un "cut-off" ultravioleta, y añadimos a la densidad lagrangiana (5.40) el contratérmino

$$\delta \bar{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1,2} \tau_{aa} [Z_3(\Lambda)-1] F_a^{R\mu\nu} F_{\mu\nu}^R.$$

Entonces, el tensor de polarización pasa a ser

$$\Pi_{ab}^{(R)\mu\nu}(k) = \sum_{j=0}^2 \Pi_{ab}^{(R,j)\mu\nu}(k), \quad (8.6)$$

con

$$\Pi_{ab}^{(R,0)\mu\nu}(k) = \Pi_{ab}^{(0)\mu\nu}(k) + \tau_{ab} [Z_3(\Lambda)-1] (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \quad (8.7)$$

$$\Pi_{ab}^{(R,j)\mu\nu}(k) = \Pi_{ab}^{(j)\mu\nu}(k) \quad (j=1,2), \quad (8.8)$$

donde  $\Pi_{ab}^{(j)\mu\nu}(k)$  ( $j=0,1,2$ ) están dadas por (8.3).

Obsérvese que lo único que se ha hecho ha sido eliminar las divergencias ultravioletas añadiendo los mismos contratérminos que a temperatura cero, en total concordancia con lo dicho en la sección 6.2.

Por otro lado, las ecuaciones (8.5), (8.8) y (8.9) implican que

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) &= -\Pi_{22}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) \\ \Pi_{12}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) &= -\Pi_{21}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} j=0,1,2 \end{array} \right. , \quad (8.9)$$

que reduce al cálculo del tensor de polarización renormalizado

$\Pi_{ab}^{(R)\nu\tau}(k)$  a dos casos:  $a=b=1$  y  $a=1, b=2$ .

$a=b=1$

La parte independiente de la temperatura viene dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{(R,0)\nu\tau}(k) &= -\Pi^{(R,0)}(k^2) (k^2 g^{\nu\tau} - k^\nu k^\tau) , \\ \Pi^{(R,0)}(k^2) &= \Pi^0(k^2) - \Pi^0(0) . \end{aligned} \quad (8.10)$$

Vamos estudiar la estructura de las correcciones termodinámicas  $\Pi_{ab}^{(R,j\beta)\nu\tau}(k)$  ( $j=1,2$ ). La invariancia de la QED proporciona

$$k_\nu \Pi_{ab}^{(R,1)\nu\tau}(k) = 0 , \quad (8.11)$$

que junto con (8.10) implica que

$$k_\nu [\Pi_{ab}^{(R,\beta)\nu\tau}(k) + \Pi_{ab}^{(R,2\beta)\nu\tau}(k)] = 0 .$$

Por otro lado,  $\Pi_{ab}^{(R,\beta)\nu\tau}(k) + \Pi_{ab}^{(R,2\beta)\nu\tau}(k)$  es simétrico en sus ín-



indices  $\nu$  y  $\tau$ , de forma que debe ser una combinación lineal de  $g^{\nu\tau}$  y de los tensores simétricos de dos índices que se pueden construir a partir de los vectores  $k^\nu$  y  $u^\nu$ , a saber:  $k^\nu k^\tau$ ,  $u^\nu u^\tau$  y  $k^\nu u^\tau + u^\nu k^\tau$ . Los coeficientes de esta combinación lineal serán funciones de los escalares Lorentz

$$\omega \equiv ku \quad \text{y} \quad K^2 \equiv \omega^2 - k^2, \quad (8.12)$$

que pueden ser interpretados como energía y módulo al cuadrado del trimomento del fotón respecto al fluido. El resultado es

$$\Pi_{11}^{(R,\beta)\nu\tau}(k) + \Pi_{11}^{(R,2\beta)\nu\tau}(k) = (\Pi_{11}^{L\beta} + \Pi_{11}^{L2\beta}) P^{\nu\tau} + (\Pi_{11}^{T\beta} + \Pi_{11}^{T2\beta}) Q^{\nu\tau}, \quad (8.13)$$

donde

$$\Pi_{11}^{Lj\beta} = \begin{cases} -\frac{1}{3} i e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \mathcal{D}_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K=0 \\ 4\lambda e^2 \frac{k^2}{K^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2pu(pu-\omega) - (p^2 - m^2 + pk)] \mathcal{D}_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K \neq 0 \end{cases} \quad (j=1,2), \quad (8.14)$$

$$\Pi_{11}^{Tj\beta} = \begin{cases} \Pi_{11}^{Lj\beta} & , \quad K=0 \\ -\frac{1}{2} \Pi_{11}^{Lj\beta} - 4\lambda e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \mathcal{D}_{11}^{j\beta}(p) & , \quad K \neq 0 \end{cases} \quad (j=1,2). \quad (8.15)$$

Los tensores  $P^{\nu\tau}$  y  $Q^{\nu\tau}$  han sido introducidos por Weldom [11],

$$P^{\nu\tau} = - \frac{1}{k^2 k^2} (\omega k^\nu \cdot k^2 u^\nu) (\omega k^\tau \cdot k^2 u^\tau) , \quad (8.16)$$

$$Q^{\nu\tau} = g^{\nu\tau} - u^\nu u^\tau + \frac{1}{k^2} (k^\nu \cdot \omega u^\nu) (k^\tau \cdot \omega u^\tau) , \quad (8.17)$$

y satisfacen

$$P^\nu_\sigma P^\sigma_\tau = P^\nu_\tau , \quad Q^\nu_\sigma Q^\sigma_\tau = Q^\nu_\tau ,$$

$$P^\nu_\sigma Q^\sigma_\tau = Q^\nu_\sigma P^\sigma_\tau = 0 ,$$

$$P^{\nu\tau} + Q^{\nu\tau} = g^{\nu\tau} - \frac{k^\nu k^\tau}{k^2} .$$

Nótese que cuando  $K=0$ ,  $k^\nu = \omega u^\nu$  y  $k^2 = \omega^2$ .

A continuación definimos

$$\Pi_{11}^L = -k^2 \Pi^{(R)0}(k^2) + \Pi_{11}^{L\beta} + \Pi_{11}^{L2\beta} , \quad (8.18)$$

$$\Pi_{11}^T = -k^2 \Pi^{(R)0}(k^2) + \Pi_{11}^{T\beta} + \Pi_{11}^{T2\beta} . \quad (8.19)$$

Entonces, de (8.6), (8.10) y (8.13) obtenemos

$$\Pi_{11}^{(R)\nu\tau}(k) = \Pi_{11}^L P^{\nu\tau} + \Pi_{11}^T Q^{\nu\tau} . \quad (8.20)$$

Como  $\Pi_{11}^L$  y  $\Pi_{11}^T$  son en general complejos,  $\Pi_{11}^{(R)\nu\tau}(k)$  también lo es.

a=1, b=2

Procediendo de forma análoga al caso a=b=1 llegamos a

$$\Pi_{12}^{(R)\nu\tau}(k) = \Pi_{12}^L p^{\nu\tau} + \Pi_{12}^T q^{\nu\tau}, \quad (8.21)$$

con

$$\Pi_{12}^L = \begin{cases} \frac{1}{3} e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K=0 \\ -4e^2 \frac{k^2}{k^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [2pu(pu-\omega) - (p^2 - m^2) + pk] \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K \neq 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\Pi_{12}^T = \begin{cases} \Pi_{12}^L & , K=0 \\ -\frac{1}{2} \Pi_{12}^L + 4ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2m^2 - p^2 + pk) \mathcal{D}_{12}^{2\beta}(p) & , K \neq 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

De (8.9), (8.20), (8.21), (8.16) y (8.17) se sigue que

$$\Pi_{11}^x = -\Pi_{22}^{x*}, \quad \Pi_{12}^x = -\Pi_{21}^{x*}, \quad (x=L,T). \quad (8.24)$$

### 8.3 EL PROPAGADOR DEL FOTON

El propagador del fotón renormalizado a primer orden radiativo  $D_{ab}^{(R)\nu\tau}(k)$  viene dado por la serie que resulta de incluir reiteradamente el tensor de polarización  $i\Pi_{ab}^{(R)\nu\tau}(k)$  en el propaga-

dor libre, esto es,

$$\begin{aligned} D_{ab}^{(R) \nu \bar{\nu}} &= D_{ab}^{\nu \bar{\nu}} + \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} D_{ac}^{\nu \rho} (i \pi_{\rho \sigma}^{(R) cd}) D_{db}^{\sigma \tau} \\ &+ \sum_{c=1,2} \sum_{d=1,2} \sum_{e=1,2} \sum_{f=1,2} D_{ac}^{\nu \rho} (i \pi_{\rho \sigma}^{(R) cd}) D_{de}^{\sigma \delta} (i \pi_{\delta \varepsilon}^{(R) ef}) D_{fb}^{\varepsilon \tau} + \dots \end{aligned}$$

Esta serie se puede sumar formalmente, obteniendo

$$D_{ab}^{(R) -1 \nu \bar{\nu}}(k) = D_{ab}^{-1 \nu \bar{\nu}}(k) - i \Pi_{ab}^{(R) \nu \bar{\nu}}(k).$$

Si tenemos en cuenta que

$$D_{ab}^{-1 \nu \bar{\nu}}(k) = i \bar{\tau}_{ab} \left[ q^{\nu \bar{\nu}} (k^2 - \lambda^2) - (1 - \frac{1}{\alpha}) k^\nu k^{\bar{\nu}} \right] \quad (8.25)$$

podemos escribir

$$D_{ab}^{(R) -1 \nu \bar{\nu}}(k) = i \bar{\tau}_{ab} \left[ q^{\nu \bar{\nu}} (k^2 - \lambda^2) - (1 - \frac{1}{\alpha}) k^\nu k^{\bar{\nu}} \right] - i \Pi_{ab}^{(R) \nu \bar{\nu}}(k). \quad (8.26)$$

El propagador completo viene dado por el inverso de esta expresión,

$$D_{ab}^{(R) \nu \bar{\nu}}(k) = \frac{-i \bar{\tau}_{ab}}{k^2 - \lambda^2} \left[ q^{\nu \bar{\nu}} + (\alpha - 1) \frac{k^\nu k^{\bar{\nu}}}{k^2 - \alpha \lambda^2} \right] - \frac{i p^{\nu \bar{\nu}}}{(k^2 - \lambda^2) \tau_{ab} - \pi_{ab}^L} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{\bar{\tau}_{ab} \pi_{ab}^L}{k^2 - \lambda^2} - \frac{(-1) \bar{\tau}_{ab} \pi_{12}^L \pi_{21}^L}{(k^2 - \lambda^2 - \pi_{11}^L)(k^2 - \lambda^2 - \pi_{22}^L) + \pi_{12}^L \pi_{21}^L} \right] - \frac{i \alpha^{\nu\tau}}{(k^2 - \lambda^2) \tau_{ab} - \pi_{ab}^T} \\
 & \times \left[ \frac{\bar{\tau}_{ab} \pi_{ab}^T}{k^2 - \lambda^2} + \frac{(-1) \bar{\tau}_{ab} \pi_{12}^T \pi_{21}^T}{(k^2 - \lambda^2 - \pi_{11}^T)(k^2 - \lambda^2 - \pi_{22}^T) + \pi_{12}^T \pi_{21}^T} \right]. \quad (8.27)
 \end{aligned}$$

Para terminar esta sección hagamos un último comentario. El propagador (8.27) satisface la identidad de WT (6.7):

$$k_\nu \mathcal{D}_{ab}^{(R) \nu\tau}(k) = -\tau_{ab} \frac{i \alpha k^\tau}{k^2 - \alpha \lambda^2} = \alpha k^\tau \mathcal{D}_{ab}(k),$$

es decir, las partes longitudinales de los propagadores libre y completo coinciden.

#### 8.4 MASAS ELECTRICA Y MAGNETICA DEL FOTON A TEMPERATURA FINITA

La masa  $\lambda$  del fotón la introducimos en la densidad lagrangiana (5.40) para evitar las divergencias infrarrojas. Ahora bien, el tensor de polarización no presenta tales divergencias pues el momento interno del loop es fermiónico, por lo que en todas las expresiones de este capítulo podemos tomar  $\lambda=0$ .

En la QED a temperatura cero el alcance de la interacción EM es infinito ya que la masa de los fotones es nula. En esta sección vamos a ver que debido a los efectos de la temperatura dicho alcance se hace finito, y que varía según que el fotón

que promedia la interacción sea de género espacio, luz o tiempo.

Las masas eléctrica  $\lambda_e$  y magnética  $\lambda_m$  del fotón se definen como las inversas de las longitudes de correlación de las partes longitudinal y transversal del campo EM:

$$\lambda_e^2 \equiv \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 \equiv \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.28)$$

La presencia de  $\tau_{aa}$  en estas ecuaciones es debida a que en (8.27) aparecen  $k^2 \tau_{ab} \Pi_{ab}^L$  y  $k^2 \tau_{ab} \Pi_{ab}^T$ , y no  $k^2 \Pi_{ab}^L$  y  $k^2 \Pi_{ab}^T$ . Para fotones de género espacio tenemos

$$\lambda_e^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.29.e)$$

Para fotones de género luz,

$$\lambda_e^2 = \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^L, \quad \lambda_m^2 = \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T. \quad (8.29.1)$$

Y para fotones de género tiempo,

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tau_{aa} \Pi_{aa}^T, \quad (8.29.t)$$

pues si  $K=0$ ,  $\pi_{aa}^T = \pi_{aa}^L$ . Usando los resultados del apéndice E, ecuaciones (E.11)-(E.14) obtenemos

$$\lambda_e^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{m^2 + 2p^2}{p(m)} N_F(p) \quad , \quad \lambda_m = 0 \quad , \quad (k^2 < 0) \quad , \quad (8.30.e)$$

$$\lambda_e = 0 \quad , \quad \lambda_m^2 = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \quad , \quad (k^2 = 0) \quad , \quad (8.30.1)$$

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \frac{2e^2}{3\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2(3m^2 + 2p^2)}{p^3(m)} N_F(p) \quad , \quad (k^2 > 0) \quad . \quad (8.30.t)$$

Vemos que efectivamente los alcances de las interacciones eléctrica y magnética (dados por  $\lambda_e^{-1}$  y  $\lambda_m^{-1}$ ) ya no son infinitos. En la figura 8.1 aparecen representados gráficamente los productos  $\beta\lambda$  frente a  $\beta m$  para valores de  $\beta m$  comprendidos entre  $10^{-2}$  y 10. Desarrollando las ecuaciones (8.30) para temperaturas altas,  $\beta m \ll 1$ , y bajas,  $\beta m \gg 1$ , llegamos a

$$\lambda_e^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{3\pi^2} - \frac{2e^2 m^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{4} + \ln 2 \right) + O(\beta^2 m^4) & , \quad \beta m \ll 1 \\ \frac{2e^2}{\pi^2} m \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \quad \beta m \gg 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda_m = 0 \quad , \quad (8.31.e)$$

$$\lambda_e = 0 \quad , \quad \lambda_m^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{6\pi^2} + \frac{e^2 m^2}{2\pi^2} \left[ \ln \frac{\beta m}{4\pi} + \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \right] + O(\beta^2 m^4) & , \quad \beta m \ll 1 \\ \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \quad \beta m \gg 1 \end{cases} \quad , \quad (8.31.1)$$

$$\lambda_e^2 = \lambda_m^2 = \begin{cases} \frac{e^2}{9\beta^2} - \frac{e^2 m^2 \pi}{12\beta} + \frac{e^2 m^2}{3\pi^2} \left( \frac{3}{8} - \ln 2 \right) + O(\beta^2 m^4) & , \beta m \ll 1 \\ \frac{2e^2}{\pi^2} \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi m}{2\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta m} + O(e^{-\beta m} m/\beta) & , \beta m \gg 1 \end{cases}$$

(8.31.t)

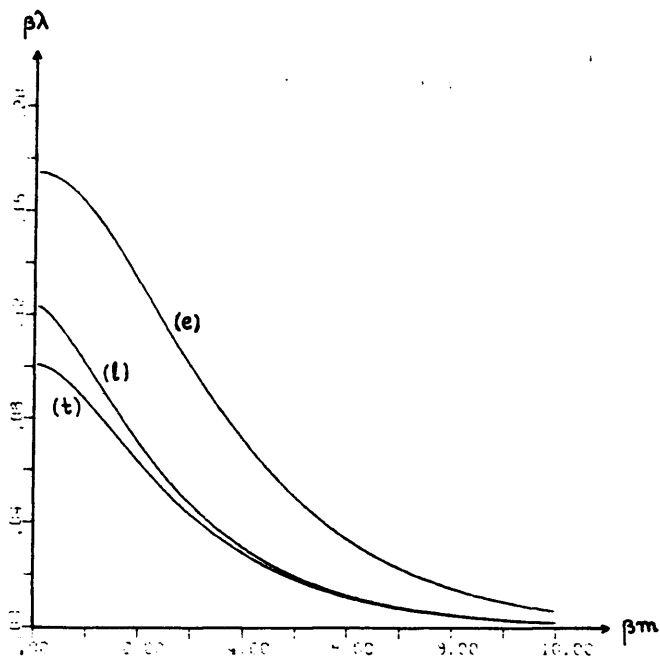


Figura 8.1



En el caso de temperaturas intermedias es necesario acudir a (8.30). Nótese que en el límite de temperaturas nulas ( $\beta m \rightarrow \infty$ ) se recupera el alcance infinito de la interacción EM.

Es importante destacar que los alcances de las interacciones eléctrica y magnética dependen de que el fotón que las media sea de género espacio, luz o tiempo.

Las expresiones de  $\lambda_e$  y  $\lambda_m$  para temperaturas bajas en una formulación no covariante habían sido obtenidas con anterioridad por Tarrach [10]. Las expresiones para temperaturas arbitrarias, ecuación (8.30), y su particularización para altas temperaturas, es, hasta donde nos es conocido, original.

El coeficiente de  $g^{vt}$  en  $D_{11}^{(R)vt}(k)$  es

$$\frac{-i(k^2 + \pi_{22}^T)}{(k^2 - \pi_{11}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{12}^T \pi_{21}^T},$$

y en  $D_{22}^{(R)vt}(k)$ ,

$$\frac{i(k^2 - \pi_{11}^T)}{(k^2 - \pi_{11}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{12}^T \pi_{21}^T},$$

donde hemos tomado  $\lambda=0$ . Ambos denominadores se anulan cuando

$$(k^2 - \pi_{11}^T)(k^2 + \pi_{22}^T) + \pi_{12}^T \pi_{21}^T = 0,$$

que a orden  $e^2$  se puede escribir

y  $D_{ab}^{\nu\tau}(x-y)$  dado por (10.21). Teniendo en cuenta que en 1+1 dimensiones, para cualquier vector  $a^\nu$ ,  $\gamma^\nu \not{a} \gamma_\nu = 0$  y usando (5.46.f) con  $\lambda=0$ , podemos elaborar un poco más la ecuación (10.23), obteniendo

$$S_{ab}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{i}{8\pi} \int d^2k \left[ \Delta_{aa}(k) - \Delta_{bb}(k) - [\Delta_{ab}(k) + \Delta_{ba}(k)] e^{-ik(x-y)} \right] \right\} \times S_{ab}(x-y), \quad (10.25)$$

donde  $\Delta_{ab}(k)$  está dado por

$$(\Delta_{ab})(k) = (U^B)(\Delta_{ab}^0)(k)(U^B) \quad , \quad (10.26.a)$$

$$\Delta_{11}^0(k) = -\Delta_{22}^{0*}(k) = \frac{1}{k^2 + \epsilon} - \frac{1}{k^2 - \frac{\epsilon^2}{\pi} + \epsilon} + \alpha \frac{e^2/\pi}{(k^2 + \epsilon)^2} \quad , \quad (10.26.b)$$

$$\Delta_{12}^0(k) = \Delta_{21}^0(k) = 0 \quad , \quad (10.26.c)$$

y la matriz  $(U^B)$  por (5.45.d). El propagador de los fermiones físicos (de tipo 1) es  $S_{11}(x-y)$ , y su expresión en el gauge de Landau ( $\alpha=0$ ) la podemos escribir en la forma más familiar

$$S_{11}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{i}{4\pi} \int d^2k [1 - e^{-ik(x-y)}] \right\} \left[ \frac{1}{k^2 + \epsilon} - \frac{1}{k^2 - \frac{\epsilon^2}{\pi} + \epsilon} - \right]$$

$$-2\pi i \, n_B(k) \left[ \bar{c}(k^2) - \bar{c}(k^2 - \frac{\epsilon^2}{\pi}) \right] S_{AA}(x-y).$$

Los efectos de la temperatura están contenidos, además de en las partes de  $S_{11}(x-y)$  que dependen de  $\beta$ , en el factor termodinámico  $n_B(k)$  ( $=\sinh^2 \theta_B(\beta)$ ) de la integral del exponente.

Si tomamos el límite de temperatura nula ( $\beta \rightarrow \infty$ ), las matrices  $(U^B)$  y  $(U^F)$  de (5.45.d) y (5.33.d) ~~tienden~~ a la matriz identidad  $2 \times 2$ , y entonces para los propagadores físicos de los campos EM y fermiónico se recuperan las expresiones a temperatura nula obtenidas por Schwinger [53].

Los resultados obtenidos en este capítulo hubiesen sido imposibles de obtener dentro del formalismo de Dolan y Jackiw por dos razones, principalmente. Primero por la ausencia, como ellos mismos señalan, de una funcional generadora para sus propagadores libres. Y segundo, por la ambigüedad en la definición de los inversos de sus propagadores, causa en cierto modo de la ausencia de esa funcional generadora.

## CAPITULO 11

### EL MODELO DE THIRRING A TEMPERATURA FINITA

#### 11.1 INTRODUCCION

El modelo de Thirring [55] (a temperatura cero) describe en 1+1 dimensiones la interacción de contacto (es decir, sin ser mediada por ningún campo bosónico) entre fermiones de masa nula. Su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \gamma^0 \psi) (\bar{\psi} \gamma^0 \psi),$$

donde  $g$  es una constante adimensional. En este capítulo vamos a resolver este mismo modelo a temperatura finita. En la sección 2 encontraremos una expresión explícita para la funcional generadora, la cual veremos que está estrechamente relacionada con la funcional del modelo de Schwinger. En la sección 11.3 generaremos las distintas soluciones para el propagador fermiónico.

#### 11.2 LA FUNCIONAL GENERADORA PARA EL MODELO

A partir de la densidad lagrangiana para el modelo de Thirring a temperatura cero y usando (5.27) y (5.25) obtenemos que, a temperatura finita, el modelo viene descrito por la siguiente densidad lagrangiana térmica

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{a=1,2} [\bar{\psi}_a \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial} \psi_a - \frac{i}{2} \tau_{aa} g^2 (\bar{\psi}_a)^{\nu} \psi_a (\bar{\psi}_a)_{\nu} \psi_a], \quad (11.1)$$

donde los dobletes térmicos  $\psi_a$  y  $\bar{\psi}_a$  están dados por la particularización de (5.28) a 1+1 dimensiones y masa nula ( $m=0$ ), y  $g$  es una constante de acoplamiento adimensional.

La funcional generadora es

$$\begin{aligned} Z[\xi_a, \bar{\xi}_a] = N(\beta) \exp \left\{ -\frac{i}{2} g^2 \sum_{a=1,2} \int d^2x \left[ \frac{\delta}{i \delta \xi_a(x)} \right]^{\nu} \frac{\delta}{i \delta \bar{\xi}_a(x)} \right\} \tau_{aa} \\ \cdot \left[ \frac{\delta}{i \delta \xi_a(x)} \right]_{\nu} \frac{\delta}{i \delta \bar{\xi}_a(x)} \left\{ \exp \left\{ - \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \bar{\xi}_a(x) S_{ab}(x-y) \xi_b(y) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (11.2)$$

donde  $N(\beta)$  es una constante de normalización y el propagador  $S_{ab}(x-y)$  es el propagador libre del fermión de masa nula en dos dimensiones. Esta funcional la podemos escribir como

$$\begin{aligned} Z[\xi_a, \bar{\xi}_a] = N(\beta) \exp \left\{ -g \sum_{a=1,2} \int d^2x \frac{\delta}{\delta \xi_a(x)} \frac{\delta}{\delta J_a^{\nu}(x)} \right\}^{\nu} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a=1,2} \int d^2x J_a^{\nu}(x) \tau_{aa} J_{\nu}^a(x) \right\} \exp \left\{ - \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \bar{\xi}_a(x) S_{ab}(x-y) \xi_b(y) \right\} \Big|_{J_a=0}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Para verlo basta desarrollar la primera exponencial de (11.3) en serie de potencias de  $g$ , hacerla actuar sobre la segunda y tomar  $J_a^\nu = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ -g \sum_{a=1,2} \int d^2x \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \frac{\delta}{\delta J_a^\nu(x)} \right\}^n \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \left. \right|_{J_a=0} \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{a=1,2} \int d^2x J_a^\nu(x) T_{aa} J_a^\nu(x) \right\} \Big|_{J_a=0} \quad (11.4)$$

Los términos con  $n$  impar no contribuyen. Los de  $n$  par dan las siguientes contribuciones:

$$n=0: \quad 1$$

$$n=2: \quad -\frac{i}{2} g^2 \sum_{a=1,2} \int d^2x \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right]^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} T_{aa} \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right]^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)}$$

$$\vdots$$

$$n=2k: \quad \frac{(-ig^2)^k}{(2k)!} (2k-1)!! \left\{ \sum_{a=1,2} \int d^2x \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right]^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} T_{aa} \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right]^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right\}^k \cdot$$

$$\vdots$$

Pero  $(2k-1)!!/(2k)!$  es lo mismo que  $1/2^k k!$ , por lo que (11.4) es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ -i \frac{g^2}{2} \sum_{a=1,2} \int d^2x \left[ \frac{\delta}{\delta \xi_a(x)} \right]^v \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right] \tau_{aa} \left[ \frac{\delta}{\delta \xi_a(x)} \right]^v \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_a(x)} \right\}^k,$$

que es el desarrollo en serie de potencias de  $g^2$  de la primera exponencial de (11.2).

Usando las propiedades (P1) y (P2) de la sección 10.2 llegamos a la siguiente expresión para (11.3):

$$Z[\xi_a, \bar{\xi}_a] = \mathcal{N}(\beta) \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{a=1,2} \int d^2x \frac{\delta}{\delta B_a^\nu(x)} \tau_{aa} \frac{\delta}{\delta B_a^\nu(x)} \right\}, \quad (11.5)$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \bar{\xi}_a(x) G_{ab}(x,y|gB) \xi_b(y) + L[B] \right\} \Big|_{B_a=0},$$

donde

$$B_a^\nu(x) = J_a^\nu(x), \quad (11.6)$$

$G_{ab}(x,y|gB)$  es la solución de la ecuación integral

$$G_{ab}(x,y|gB) = S_{ab}(x-y) - ig \sum_{c=1,2} \int d^2z S_{ac}(x-z) \beta_c(z) G_{cb}(z,y|gB) \quad (11.7)$$

y  $L[B]$  es la funcional

$$L[B] = -i \sum_{a=1,2} \int_0^1 dg' \int d^2x \operatorname{tr} \bar{\psi}_a(x) G_{aa}(x, x | g' B). \quad (11.8)$$

Nótese la gran analogía que existe entre las ecuaciones (10.3)-(10.6) del modelo de Schwinger y (11.5)-(11.8). Las últimas pueden obtenerse a partir de las primeras haciendo las sustituciones

$$e \rightarrow g,$$

$$D_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \rightarrow i\tau_{ab} g^{\nu\tau} \delta^{(2)}(x-y), \quad (11.9)$$

$$A_a^\nu(x) \rightarrow B_a^\nu(x),$$

y tomando  $B_a^\nu = 0$ . Nótese que, aunque las dimensiones de los objetos que figuran a la izquierda son distintas de los que figuran a la derecha, el balance dimensional de (10.4) y (10.5) es el mismo que el de (11.7) y (11.8).

A partir de (11.5), mediante derivación logarítmica con respecto a las fuentes externas  $\xi_a$  y  $\bar{\xi}_a$ , se puede calcular el propagador completo del modelo. Nosotros en lugar de seguir este método vamos a generar una solución más general para el propagador. Para ello, y puesto que las corrientes  $\bar{\psi}_a \gamma^\nu \psi_a$  son conservadas, añadimos un acoplamiento de las mismas a una fuente longitudinal arbitraria. Esto equivale a sustituir la exponencial

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{a=1,2} \int d^2x J_a^\nu(x) \tau_{aa} J_\nu^\mu(x)\right\} \quad (11.10)$$



de (11.3) por

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y J_a^\nu(x) K_{\nu\tau}^{ab}(x-y) J_b^\tau(y)\right\}, \quad (11.11)$$

con  $K_{ab}^{\nu\tau}(x-y)$  dada por

$$K_{ab}^{\nu\tau}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} K_{ab}^{\nu\tau}(k), \quad (11.12.a)$$

$$(K_{ab}^{\nu\tau})(k) = (U^B)(K_{ab}^{\nu\tau 0})(k)(U^B), \quad (11.12.b)$$

$$K_{11}^{\nu\tau 0}(k) = K_{22}^{\nu\tau 0}(k) = i g^{\nu\tau} - i f(k^2) \frac{k^\nu k^\tau}{k^2 + i\epsilon}, \quad (11.12.c)$$

$$K_{12}^{\nu\tau 0}(k) = K_{21}^{\nu\tau 0}(k) = 0, \quad (11.12.d)$$

y  $f(k^2)$  una función arbitraria de  $k^2$  sin dimensiones. Entonces, en lugar de (11.5) obtenemos

$$\begin{aligned} Z[\xi_a, \bar{\xi}_a] &= \mathcal{N}(\beta) \exp\left\{\frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta B_a^\nu(x)} K_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \frac{\delta}{\delta B_b^\tau(y)}\right\} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \bar{\xi}_a(x) G_{ab}(x,y|q\beta) \xi_b(y) + L[B]\right\} \Big|_{B_a=0}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

donde ahora

$$B_a^\nu(x) = \sum_{b=1,2} \int d^2y \, i K_{ab}^{\nu\tau}(x-y) J_\tau^b(y). \quad (11.14)$$

Nótese que en la funcional generadora (11.13) todo es conocido.  $B_a^\nu(x)$  está dado por (11.13),  $K_{ab}^{\nu\tau}(x-y)$  por (11.12), y  $G_{ab}(x,y|gB)$  y  $L[B]$  por el resultado de efectuar las sustituciones (11.9) en (10.8), (10.11) y (10.17), (10.18). A partir de (11.13), mediante derivación logarítmica respecto a las fuentes externas, podemos generar distintas soluciones para el propagador del modelo de Thirring, una para cada  $f(k^2)$ .

### 11.3 EL PROPAGADOR FERMIONICO COMPLETO

El propagador completo del fermión estará dado por

$$\begin{aligned} S_{ab}(x-y) &= \left. \frac{\delta^2 \ln Z[\bar{\xi}_a, \xi_a]}{\delta \bar{\xi}_a(x) \delta \xi_b(y)} \right|_{\bar{\xi}_a = \xi_a = 0} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta B_a^\nu(x)} K_{ab}^{\nu\tau}(x-y) \frac{\delta}{\delta B_b^\tau(y)} \right\} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\mathcal{N}'(\beta)} \exp \left\{ -g \sum_{c=1,2} \int d^2z [\mathcal{L}_{ac}(x-z) - \mathcal{L}_{bc}(y-z)] \bar{\psi}_c(z) \psi_c(z) \right\} S_{ab}(x-y). \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ \frac{i}{2} \sum_{a,b=1,2} \int d^2x d^2y B_a^v(x) \Pi_{v\tau}^{ab}(x-y) B_b^{\tau}(y) \right\} \Big|_{B_a=0}, \quad (11.15)$$

donde  $\mathcal{N}'(\beta)$  es la constante dependiente de  $\beta$  dada por

$$Z[\xi_a = \bar{\xi}_a = 0] = \mathcal{N}(\beta) \mathcal{N}'(\beta).$$

Ahora bien, usando la propiedad (P1) de la sección 10.1 tenemos que

$$\mathcal{N}'(\beta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left[ q^{v\tau} \delta_{ab} - \sum_{c=1,2} i \Pi_{ac}^{vp} K_p^{\tau}{}_{cb} \right]^{-1} \right\}.$$

De (11.15) y de la propiedad (P3) de la sección 10.1 obtenemos

$$S_{ab}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{q^2}{2} \sum_{c,d=1,2} \int d^2z_1 d^2z_2 f_{ab,c}^v(x,y,z_1) K_{v\tau}^{cd}(z_1-z_2) f_{ab,d}^{\tau}(x,y,z_2) \right\} \cdot S_{ab}(x-y), \quad (11.16)$$

con  $f_{ab,d}^v(x,y;z)$  dada por (10.24) con las sustituciones (11.9) y  $K_{ab}^{v\tau}(x-y)$ , en notación matricial, por

$$(K_{ab}^{v\tau})(x-y) = \left[ (K_{ab}^{v\tau})^{-1} - (i \Pi_{ab}^{v\tau}) \right]^{-1}(x-y). \quad (11.17)$$

Introduciendo (11.12) y (10.18) con (11.9) en (11.17) resulta

$$\bar{K}_{ab}^{\nu\tau}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik(x-y)} \bar{K}_{ab}^{\nu\tau}(k), \quad (11.18.a)$$

$$(\bar{K}_{ab}^{\nu\tau})(k) = (U^B)(\bar{K}_{ab}^{\nu\tau 0})(k)(U^B), \quad (11.18.b)$$

$$K_{11}^{\nu\tau 0}(k) = \bar{K}_{22}^{\nu\tau 0*}(k) = \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\pi}} g^{\nu\tau} - \frac{ik^{\nu}k^{\tau}}{k^2 + i\epsilon} \left[ f(k^2) - \frac{q^2/\pi}{1 + \frac{q^2}{\pi}} \right], \quad (11.18.c)$$

$$K_{12}^{\nu\tau 0}(k) = K_{21}^{\nu\tau}(k) = 0. \quad (11.18.d)$$

Teniendo en cuenta que en 1+1 dimensiones, para cualquier vector  $a^\nu$ ,  $\gamma^\nu \not{a}_\nu = 0$ , y usando (5.46.f) con  $\lambda=0$ , obtenemos para (11.16) la siguiente expresión

$$S_{ab}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{i q^2}{8\pi^2} \int d^2k \{ \Omega_{aa}(k) + \Omega_{bb}(k) - \right. \\ \left. - [\Omega_{ab}(k) + \Omega_{ba}(k)] e^{-ik(x-y)} \} \right\} S_{ab}(x-y), \quad (11.19)$$

donde

$$(\Omega_{ab})(k) = (U^B)(\Omega_{ab}^0)(k)(U^B), \quad (11.20.a)$$

$$\Omega_{11}^0(k) = -\Omega_{22}^{0*}(k) = \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} \left[ f(k^2) - \frac{q^2/\pi}{1 + \frac{q^2}{\pi}} \right], \quad (11.20.b)$$

$$\Omega_{12}^0(k) = \Omega_{21}^0(k) = 0. \quad (11.20.c)$$

Ya hemos dicho que  $f(k^2)$  es una función arbitraria sin dimensiones de  $k^2$ , por lo que para cada  $f(k^2)$  obtenemos un propagador. De esta forma podemos generar todas las soluciones del modelo de Thirring a temperatura finita.

El propagador físico está dado por  $S_{11}(x-y)$ ,

$$S_{11}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{Lg^2}{4\pi^2} \int d^2k \, \Omega_{11}(k) [1 - e^{-ik(x-y)}] \right\} S_{11}(x-y).$$

Nótese que los efectos de la temperatura, además de en  $S_{11}(x-y)$ , están contenidos en la  $\Omega_{11}$  que aparece en el exponente.

Si tomamos  $f(k^2) = f = \text{const.}$  podemos escribir  $S_{11}(x-y)$  en la forma

$$S_{11}(x-y) = \exp \left\{ -\frac{ig^2}{4\pi^2} \left[ f - \frac{g^2/\pi}{1 + g^2/\pi} \right] \int d^2k \left[ \frac{1}{k^2 + i\epsilon} + 2\pi i n_B(k) \delta(k^2) \right] \right\} [1 - e^{-ik(x-y)}] S_{11}(x-y).$$

El caso particular  $f=0$  equivale a no haber sustituido (11.10) por (11.11) en (11.3). Hay otro caso interesante, aquel para el que

$$f = \frac{g^2/\pi}{1 + g^2/\pi},$$

pues entonces el propagador completo coincide con el libre.

Si hacemos la elección

$$f(k^2) = \frac{g^2 \hbar}{4\pi} - \epsilon^2 \left( \frac{\alpha}{k^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \frac{c^2}{\hbar} + i\epsilon} \right),$$

donde  $\alpha$  es un parámetro adimensional arbitrario, reproducimos la solución (10.25)-(10.26) del modelo de Schwinger.

Nuevamente, si tomamos el límite de temperatura nula ( $\beta \rightarrow \infty$ ), las matrices  $(U^B)$  y  $(U^F)$  que aparecen respectivamente en el exponente y el propagador  $S_{ab}(x-y)$  de (11.19) tienden a la matriz identidad  $2 \times 2$ , y entonces se recuperan las soluciones del modelo de Thirring a temperatura nula.

### CONCLUSIONES

Recordemos cuáles son las principales aportaciones que se recogen en esta memoria.

En la primera parte estudiamos un sistema en equilibrio termodinámico formado por  $N$  partículas idénticas cargadas interactuando con un campo EM dinámico y mediante potenciales coulombianos. Hemos de destacar las siguientes contribuciones:

- I.1. Del capítulo 1, el desacoplamiento que en la función de partición clásica  $Z_{C1}$  tiene lugar entre los grados de libertad transversales del campo EM y las partículas, de forma que toda la interacción entre ellas es a través de los potenciales electrostáticos de repulsión.
- I.2. Por el contrario, en el capítulo 2 vemos que en la función de partición cuántica  $Z_Q$  dicho desacoplamiento no tiene lugar. Sin embargo, en la cota que en el apéndice A se da para el propagador entre dos estados del sistema sí que tiene lugar.
- I.3. En el capítulo 3 obtenemos para  $Z_Q$  un desarrollo en serie de potencias de  $\hbar$  cuando  $\hbar \rightarrow 0$ , y encontramos expresiones para las correcciones cuánticas de orden  $\hbar^2$  a  $Z_{C1}$ . Demostramos que dichas correcciones provienen de fuerzas instantáneas de carácter dipolar y de la autointeracción de las partículas mediada por el campo EM dinámico.

En la segunda parte de la memoria recopilamos los métodos existentes de cuantificar una teoría de campos a temperatura finita, así como las reglas de Feynman a que dan lugar.

En la tercera parte nos centramos en la QED y su renormalización ultravioleta a un "loop". En el capítulo 6, siguiendo el método propuesto por 't Hooft y Veltman [48] para temperatura cero,

encontramos las identidades de WT a temperatura finita. Las principales aportaciones de los restantes capítulos de esta parte son:

- III.1. Del 7 la corrección térmica de orden  $e^2$  a la masa del electrón. Cuando la particularizamos para el referencial en que el fluido se encuentra en reposo recuperamos los resultados no covariantes ya conocidos de Peressutti y Skagerstam [8] y de Donoghue, Holstein y Robinett [9]. También probamos que si en lugar de renormalizar en el ultravioleta la teoría con los mismos contratérminos que a temperatura cero, se les añaden correcciones térmicas, (como hacen algunos autores),  $\delta m(\Lambda)$  y  $Z_2(\Lambda)$  adquieren estructura matricial, (lo que no es tenido en cuenta por dichos autores). De aquí la prescripción que hemos tomado para renormalizar: eliminar únicamente las partes divergentes ultravioletas, que son las mismas que a temperatura cero. Además, cualquier otra renormalización ultravioleta está relacionada con la anterior mediante una renormalización finita ultravioleta.
- III.2. En el 8 evaluamos a orden  $e^2$  las longitudes de correlación para las partes eléctrica y magnética del campo EM. Al restringirnos a temperaturas bajas recuperamos los resultados ya conocidos de Tarrach [10], obtenidos de forma no covariante.
- III.3. En el 9 calculamos la corrección al momento magnético del electrón, a orden  $e^2$ , debida a la temperatura. El resultado que obtenemos difiere del de otros autores, Fujimoto y Yee [51]. Nuestra idea es que la no covariancia de sus cálculos lleva a una identificación errónea del factor de forma  $F_2$ , y por tanto, a una expresión incorrecta para el momento magnético. Como prueba de consistencia demostramos que la corriente fermiónica a partir de la cual calculamos el momento magnético es efectivamente conservada.



La cuarta parte la dedicamos a encontrar las soluciones exactas de los modelos de Schwinger y de Thirring a temperatura finita. En ambos casos hallamos la funcional generadora y mediante derivación logarítmica de ésta respecto a las fuentes externas de que depende generamos los propagadores completos. Las contribuciones originales más importantes son:

- IV.1. Las masas de las partículas no se ven afectadas por la temperatura.
- IV.2. En el modelo de Schwinger el propagador completo del campo EM tiene el mismo tipo de dependencia con la temperatura que el libre. Sin embargo, el propagador fermiónico incorpora una dependencia adicional con la temperatura; otro tanto ocurre con el propagador del modelo de Thirring.

# APENDICE A

## OBTENCION DE (2.7) Y COTAS A $Z_{N=1,Q}$

En este apéndice vamos a obtener (2.7) y a dar cotas para el propagador (2.6) y para la función de partición de una sola partícula en interacción con el campo EM.

La ecuación (2.6) es una integral de camino sobre  $\vec{x}_i(\tau)$ ,  $\vec{p}_i(\tau)$  para  $i=1, \dots, N$  y sobre  $q(\vec{k}, \lambda, \tau)$ ,  $\pi(\vec{k}, \lambda, \tau)$  para todo  $(\vec{k}, \lambda)$ . Para efectuarla hacemos una partición del intervalo temporal  $[0, \beta\hbar]$  en  $M+1$  subintervalos de longitud  $\delta$ ,

$$\delta = \frac{\beta\hbar}{M+1}, \quad (A.1)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{x}'; \beta\hbar) = & \int \prod_{i=1}^N \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^M \prod_{l'=1}^{M+1} \frac{d^3 \vec{x}_{i,l} d^3 \vec{p}_{i,l'}}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{\vec{k}, \lambda} \frac{dq_{\vec{k}} d\pi_{\vec{k}}}{2\pi\hbar} \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \sum_{l=0}^{M+1} [i\vec{p}_{i,l}(\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{i,l-1}) + i \int d^3 \vec{k} \pi_{\vec{k}}(q_{\vec{k},l} - q_{\vec{k},l-1}) - \right. \\ & - \delta \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} (\vec{p}_{j,l} - i q \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) q_{\vec{k}} \exp \{ \frac{i}{2} \vec{k}(\vec{x}_{j,l} + \vec{x}_{j,l-1}) \})^2 - \\ & \left. - \frac{\delta}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} |c(\vec{k})|^2 (|\pi_{\vec{k}}|^2 + \omega^2 |q_{\vec{k}}|^2) - \delta \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4\pi |\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{j,l}|} \right] \} \end{aligned} \quad (A.2)$$

con condiciones de contorno

$$\vec{x}_{i,M+1} = \vec{x}_i(\beta\hbar) = \vec{x}_i, \quad \vec{x}_{i,0} = \vec{x}_i(0) = \vec{x}_i,$$

$$q_{M+1} = q(\beta\hbar) = q, \quad q_0 = q(0) = q.$$

La ambigüedad en el acoplamiento de materia con potenciales vector la hemos resuelto en (A.2) eligiendo el punto medio

$\frac{1}{2} (\vec{x}_{i,1} + \vec{x}_{i,1-1})$  como argumento del campo EM en el producto  $\vec{x}_i \vec{A}(\vec{x}_i, t)$  [21, 26]. Una discusión de la relación de esta ambigüedad con la de Ito se puede encontrar en [26].

Las integrales en  $\vec{p}_{i,1}$  y  $\pi_1$  de (A.2) son gaussianas y se pueden efectuar. El resultado es

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{x}'; \beta\hbar) = & \int \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^M \prod_{\vec{p}_i, \lambda} \frac{(2\pi\hbar\delta)^{-1/2}}{(m^{-1}2\pi\hbar\delta)^{3/2}} \prod_{l=1}^M \frac{d^3\vec{q}_{i,l}}{(m^{-1}2\pi\hbar\delta)^{3/2}} \frac{dq_l}{(2\pi\hbar\delta)^{1/2}} \cdot \\ & \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^{M+1} \left[ -\frac{m}{2\delta} \sum_{i=1}^N (\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{i,l-1})^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{q_l^2}{4n|\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{j,l}|} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\delta}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} |c(\vec{k})|^2 \left( \left| \frac{q_l - q_{l-1}}{\delta} \right|^2 + \omega^2 |q_l|^2 \right) \right] \right\} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vec{x}_{i,2} - \vec{x}_{i,1-1}) \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} c(\vec{k}) \vec{E}(\vec{k}, \lambda) q_l \exp \left\{ \frac{i}{2} \hbar (\vec{x}_{i,l} + \vec{x}_{i,l-1}) \cdot \vec{k} \right\}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Simplificaremos (A.3) utilizando el resultado de Feynman [18]

$$\int_{x(0)=x}^{x(T)=x'} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi\hbar\delta)^{M/2}} \prod_{i=1}^M \frac{dx_i}{(m^{-1}2\pi\hbar\delta)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{M-1} \delta \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\delta} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m\omega^2}{2} x_i^2 + i x_i j_i \right] \right\} = \left( \frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh \omega T} \right) \cdot \quad (A.4)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{-i}{4m\omega\hbar} \int_0^T dt \int_0^T dt' e^{-\omega|t-t'|} j(t) j(t') - \frac{m\omega}{2\hbar \sinh \omega T} \cdot \right.$$

$$\left. + [(x^2 - x'^2) \cosh \omega T - 2xx' + 2A(xe^{\omega T} - x') + 2B(x'e^{\omega T} - x) + (A^2 + B^2)e^{\omega T} - 2AB] \right\},$$

con

$$A = \frac{i}{2m\omega} \int_0^T dt e^{-\omega t} j(t), \quad B = \frac{i}{2m\omega} \int_0^T dt e^{-\omega(T-t)} j(t). \quad (A.5)$$

Usando (A.4) y (A.5) para evaluar la integral sobre las  $q$ 's de (A.3), llevando el resultado a (3.5) y efectuando la integral sobre  $q(\vec{k}, \lambda)$ , que también es gaussiana, obtenemos (2.7), en donde ya hemos dado la versión discretizada de las expresiones que en nuestro caso corresponden a (A.4) y (A.5).

En cuanto a la cota al propagador (2.6) tenemos que éste se puede escribir en la forma (A.3). Ahora bien, el exponente del integrando de (A.3) es la suma de la energía cinética de las partículas (primer sumando), la energía de Coulomb (segundo sumando), la energía del campo EM libre (tercer sumando), y un cuarto término asociado a la interacción entre el campo y las partículas. Este último

timo término es imaginario puro, por lo que su exponencial tiene módulo 1. Entonces el propagador (2.6) está acotado por el producto de los propagadores del campo EM libre y de N partículas interaccionando via potenciales de Coulomb:

$$\begin{aligned} & |\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N; \{q\} | \exp(-\beta H_Q) | \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N; \{q\} \rangle| \leq \\ & \leq \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \exp[-\beta (H_{P,Q}^0 + H_Q)] | \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N \rangle \langle \{q\} | \exp(-\beta H_{EM,Q}) | \{q\} \rangle, \end{aligned} \quad (A.6)$$

donde  $H_{P,Q}^0 = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i^2/2m)$ . Este resultado constituye la generalización del teorema 15.6 de [22] a campos EM dinámicos.

Si nos restringimos al caso de una sola partícula ( $N = 1$ ), la ecuación (A.6) nos proporciona la siguiente cota para la función de partición

$$Z_{N=1,Q} \leq V \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} Z_{EM,Q}. \quad (A.7)$$

Si ahora introducimos el sistema con una sola partícula en un potencial externo  $\phi(\vec{x})$  tenemos

$$Z_{N=1,Q} \leq \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} Z_{EM,Q} \int d^3x \exp[-\beta\phi(\vec{x})],$$

que es la generalización del teorema 9.2 de [22] a campos EM dinámicos. Para este caso, y llamando  $E_0$  a la energía del estado fundamental, obtenemos la cota

$$\exp(-\beta E_0) \leq \text{tr}[\exp(-\beta H_Q)] \leq \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3/2} Z_{EM,Q} \int d^3x \exp[-\beta\phi(\vec{x})].$$

## APENDICE B

### OBTENCION DE (3.6)

Vamos a obtener la ecuación (3.6), que no es otra cosa que el valor de la integral (2.7) cuando  $\hbar \rightarrow 0$  ( $P = 1$ ). Para ello vamos a proceder por pasos: 1) desarrollo de  $G(\vec{y})$  en una serie de potencias de  $\hbar$ , considerando la serie formada por todos los términos de orden  $\hbar^n$  con  $n \geq 1$  como una perturbación; 2) desarrollo de la exponencial de tal perturbación en una serie de potencias; 3) estudio del orden en  $\hbar$  de los términos obtenidos en este último desarrollo y selección de las primeras correcciones cuánticas; y, 4) evaluación explícita de estas primeras correcciones cuánticas.

#### Paso 1

De acuerdo con lo dicho en la sección 3.2, en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  las primeras contribuciones cuánticas vienen de la permutación identidad, para la que se tiene las ecuaciones (3.2)-(3.5). Sustituyendo (3.3) en (2.10) y teniendo en cuenta (3.4) y (3.5) los primeros términos del desarrollo de (2.10) en serie de potencias de  $\hbar$  son

$$G(\vec{q}) = \frac{1}{\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \delta \left\{ -\frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{i,l-1}}{\delta} \right)^2 - \sum_{i,j=1}^N \frac{q^2}{4N|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \right. \\ \left. \times \left[ 1 + (\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{j,l})_\alpha D_{ij}^\alpha + (\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{j,l})_\alpha Q_{ij}^{\alpha\beta} (\vec{x}_{i,l} - \vec{x}_{j,l})_\beta + \dots \right] \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1^2}{2\beta\hbar^2} \sum_{i,l=1}^{M+1} \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|e(k)|^2}{\omega^2} [(\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l-1}) \vec{E}(k, \lambda)] \cdot \\
 & \times [2 + \omega^2 (\frac{\beta^2 \hbar^2}{12} + |l-l'|^2 \cdot \beta \hbar \delta |l-l'| - \frac{1}{24} (\omega \beta \hbar)^3 + \dots)] e^{-i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \cdot \\
 & \cdot [1 + \frac{1}{2} k^2 (\vec{\xi}_{i,l} + \vec{\xi}_{i,l-1} - \vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l-1}) - \frac{1}{4} [k^2 (\vec{\xi}_{i,l} + \vec{\xi}_{i,l-1} - \vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l-1})^2 + \\
 & + \dots] [(\vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l-1}) \vec{E}(k, \lambda)] \cdot \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

donde  $D_{ij}^\alpha$  y  $Q_{ij}^{\alpha\gamma}$  son el vector dipolar y el tensor cuadrupolar

$$D_{ij}^\alpha = \frac{(x_i - x_j)^\alpha}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2}, \quad Q_{ij}^{\alpha\gamma} = \frac{3(x_i - x_j)^\alpha (x_i - x_j)^\gamma - (\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 \delta^{\alpha\gamma}}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^4}, \quad (B.2)$$

y hemos adoptado el convenio de suma en los índices repetidos para los subíndices  $\alpha$  y  $\gamma$ , asociados a las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de un vector.

Vamos a agrupar los términos de (B.1) por su orden en  $N$ . Para ello usamos (3.4), (3.5) y que en límite  $N \rightarrow 0$ ,  $\delta \sim \beta N$ , tal y como se explicó en la sección 3.2. De orden  $N^0$  tenemos tres términos: el libre (energía cinética), el de repulsión electrostática, y

$$-\frac{q}{\lambda^2} \sum_{l,l'=1}^{M+1} \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|c(k)|^2}{\omega^2} [(\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] \cdot e^{ik(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} [(\vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] ,$$

proviniente de la interacción campo EM-partícula y que por la condición de contorno (3.2) es nulo ya que

$$\sum_{l=1}^{M+1} (\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l-1}) \vec{E}(k,\lambda) = (\vec{\xi}_{i,M+1} - \vec{\xi}_{i,0}) \vec{E}(k,\lambda) = 0 .$$

Así pues,

$$G_0 = G_K(\vec{\xi}) - \beta H_C \quad , \quad G_K = -\frac{m}{2\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \delta \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l-1}}{\delta} \right)^2 \quad (B.3)$$

y  $H_C$  dado por (1.1.d).

El único término lineal en  $\chi$  tiene su origen en la interacción dipolar,

$$G_1^D(\vec{\xi}) = -\frac{q^2}{2\pi\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \delta \sum_{i,j=1}^N \frac{D_{ij}^\alpha}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \xi_{i,l,\alpha} \quad , \quad (B.4)$$

ya que la otra contribución posible, con origen en la interacción campo EM-partícula,



$$-\frac{q^2}{2\beta\hbar^2} \sum_{l,l'=1}^{M+1} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\lambda=1,2} \left( \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|c(k)|^2}{\omega^2} [(\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] + \right. \\ \left. + e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} [k(\vec{\xi}_{i,l} + \vec{\xi}_{i,l'} - \vec{\xi}_{j,l'} - \vec{\xi}_{j,l})] [(\vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] \right)$$

se anula, (basta hacer el cambio  $i \rightarrow j$  ó  $l \rightarrow l'$  para verlo)

El término de orden  $\hbar^2$  es

$$G_2(\vec{\xi}) = G_2^0(\vec{\xi}) + G_2^{F_1}(\vec{\xi}) + G_2^{F_2}(\vec{\xi}), \quad (B.5)$$

donde

$$G_2^0(\vec{\xi}) = -\frac{q^2}{2\pi\hbar} \sum_{l=1}^{M+1} \delta \sum_{i,j=1}^N \frac{\xi_{i,l,\alpha} (\xi_{i,l} - \xi_{i,l'}) \alpha_{ij}^{\alpha\gamma}}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}, \quad (B.6)$$

$$G_2^{F_r}(\vec{\xi}) = \frac{q}{2\beta\hbar^2} \sum_{l,l'=1}^{M+1} \sum_{i,j=1}^N \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|c(k)|^2}{\omega^2} \cdot e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} [(\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] q^r [(\vec{\xi}_{j,l} - \vec{\xi}_{j,l'}) \vec{E}(k,\lambda)] \quad (B.7)$$

para  $r=1,2$ , y

$$q^1 = \frac{1}{4} [k(\vec{\xi}_{i,l} + \vec{\xi}_{i,l'} - \vec{\xi}_{j,l'} - \vec{\xi}_{j,l})]^2 \quad (B.8)$$

$$q^2 = -\omega^2 \left[ \frac{1}{12} (\beta \hbar)^2 \cdot |l-l'| \delta^2 - \beta \hbar \delta |l-l'| \right]. \quad (\text{B.9})$$

Vamos a simplificar estas expresiones. Desarrollando el cuadrado de (B.8) y usando la condición de contorno (3.2) resulta

$$G_1^{F_1}(\vec{\xi}) = \frac{-q^2}{\beta \hbar^2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|a(\vec{k})|^2}{\omega^2} I(G_2^{F_1}, N, M), \quad (\text{B.10})$$

$$I(G_2^{F_1}, N, M) = \left| \sum_{l=1}^N e^{i\vec{k}\vec{x}_l} \sum_{l'=1}^{M+1} [(\vec{\xi}_{l,l'} - \vec{\xi}_{l',l}) \vec{e}(\vec{k}\lambda)] \frac{\vec{k}(\vec{\xi}_{l,l'} + \vec{\xi}_{l',l})}{2} \right|^2. \quad (\text{B.11})$$

Con respecto a  $G_2^{F_2}$ , si desarrollamos la función  $q^2$  de (B.9) tenemos

$$q^2 = -\omega^2 \left[ \frac{1}{12} (\beta \hbar)^2 \cdot l^2 \delta^2 - l^2 \delta^2 - 2ll' \delta^2 - \beta \hbar (l-l') \text{sgn}(l-l') \right].$$

Teniendo en cuenta (3.2), al efectuar las sumas en  $l$  y  $l'$  de (B.7) todos los términos, salvo el  $-2ll' \delta^2$ , van a dar contribución nula, quedando

$$G_2^{F_2}(\vec{\xi}) = \frac{q^2}{\beta \hbar^2} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |a(\vec{k})|^2 I(G_2^{F_2}, N, M), \quad (\text{B.12})$$

$$I(G_2^{\bar{F}_2}, N, M) = \left| \sum_{l=1}^N e^{i\vec{k}\vec{x}_l} \sum_{l=1}^{M+1} S\vec{E}(\vec{k}, \lambda) \vec{\xi}_{l,l} \right|^2. \quad (B.13)$$

Resumiendo,

$$G = G_K - \beta H_C + G_1^D + G_2^Q + G_1^{\bar{F}_1} + G_2^{\bar{F}_2} + O(\hbar^3), \quad (B.14)$$

donde los índices K, D, Q y F hacen referencia al origen de las contribuciones (cinética, dipolar, cuadrupolar y campo). Las expresiones que nos dan los términos que aparecen en (B.14) son (B.3), (1.1.d), (B.4), (B.6) y (B.10)-(B.13).

## Paso 2

Consideremos  $G_1^D + G_2^Q + G_2^{\bar{F}_1} + G_2^{\bar{F}_2} + O(\hbar^3)$  como una perturbación frente a  $G_K - \beta H_C$  y desarrollemos su exponencial en serie de potencias, esto es,

$$Z_{N,q} = \frac{1}{N!} Z_{EH,q} \int \prod_{l=1}^N d^3\vec{x}_l \exp(-\beta H_C) \int \prod_{j=1}^N d^3\vec{\xi}_j \exp[G_K(\vec{\xi})], \quad (B.15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [G_1^D + G_2^Q + G_2^{\bar{F}_1} + G_2^{\bar{F}_2} + O(\hbar^3)]^n.$$

### Paso 3

En (B.15) s3lamente nos podemos quedar hasta t3rminos que vayan con  $M^2$  pues en el desarrollo de  $G(\vec{y})$  despreciamos3rdenes superiores. Ahora bien,  $G_1^D$ ,  $G_2$ ,  $G_2^{F1}$ ,  $G_2^{F2}$  y  $(G_1^D)^2$  van respectivamente con  $\beta^{3/2}M$ ,  $\beta^2M^2$ ,  $\beta M^2$ ,  $\beta^2M^2$  y  $\beta^3M^2$ . El resto de los t3rminos de la serie de (B.15) van con3rdenes superiores de  $M$ . As3 pues,

$$Z_{N,u} = \frac{1}{N!} Z_{EM,u} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \exp(-\beta H_C) \int \prod_{j=1}^N d^3\vec{\xi}_j \exp[G_K(\vec{\xi})] \cdot \\ \cdot \left[ 1 + G_1^D + \frac{1}{2} (G_1^D)^2 + G_2^u + G_2^{F1} + G_2^{F2} + O(\hbar^3) \right],$$

cuyo primer t3rmino se puede integrar f3cilmente:

$$Z_{N,u} = \frac{1}{N!} Z_{EM,u} \int \prod_{i=1}^N d^3\vec{x}_i \left\{ \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} + Z'_{N,u} \right\}, \quad (B.16)$$

donde

$$Z'_{N,u} = \int \prod_{i=1}^N \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(m^{-1}2\pi\hbar\delta)^{3/2}} \prod_{i=1}^M \frac{d^3\vec{\xi}_{i,i}}{(m^{-1}2\pi\hbar\delta)^{3/2}} \exp[G_K(\vec{\xi})] \cdot \\ \cdot \left[ G_1^D + \frac{1}{2} (G_1^D)^2 + G_2^u + G_2^{F1} + G_2^{F2} \right]. \quad (B.17)$$

Paso 4

Evaluemos la integral de camino (B.17). Para poder integrar más fácilmente diagonalizamos el exponente  $G_K(\vec{\xi})$ , dado por (B.3). Así pues, efectuemos una rotación

$$\begin{pmatrix} \vec{s}_{i,1} \\ \vdots \\ \vec{s}_{i,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,11} & \dots & a_{i,1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,M1} & \dots & a_{i,MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{i,M} \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

tal que

$$G_K(\vec{\xi}) = -\frac{m(M+1)}{2\beta\hbar^2} \sum_{i=1}^N (\vec{\xi}_{i,1} \dots \vec{\xi}_{i,M}) A_i \begin{pmatrix} \vec{s}_{i,1} \\ \vdots \\ \vec{s}_{i,M} \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

se diagonalice a

$$-\frac{m(M+1)}{2\beta\hbar^2} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M a_{il} \vec{\xi}_{il}.$$

Las  $a_{i,m}$  son las componentes de los autovectores de la matriz  $A_i$  con autovalores  $\lambda_{i,m}$ . Como el determinante es invariante bajo transformaciones unitarias, tenemos que

$$\det A_i = \prod_{l=1}^M a_{il} = M+1. \quad (B.19)$$

Bajo el cambio (B.18) las diferentes  $G$  que aparecen en (B.17) se convierten en funciones de  $\vec{\chi}_{i,1}$  del mismo orden que tenían en  $\vec{\xi}_{i,1}$ . Entonces, para efectuar la integral sólo hay que usar

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-ax^2} = a^{-(n+1/2)} \Gamma(n+1/2), \quad (B.20.a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = 0. \quad (B.20.b)$$

Antes de integrar (B.17) de la forma que acabamos de explicar, vamos a estudiar la influencia del campo en la interacción entre partículas. Empecemos por  $G_2^{F1}$ , ecuación (B.10): desarrollando  $I(G_2^{F1}, N, M)$ , ecuación (B.11), tenemos

$$I(G_2^{F1}, N, M) = \frac{1}{J} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m=1}^M e^{i\vec{R}(\vec{\chi}_i - \vec{\chi}_j)}.$$

$$+ [(\vec{\epsilon}_{i,l})(\vec{k}_{i,l-1})(\vec{\epsilon}_{j,m})(\vec{k}_{j,m-1}) - (\vec{\epsilon}_{i,l})(\vec{k}_{i,l-1})(\vec{\epsilon}_{j,m-1})(\vec{k}_{j,m}) -$$

$$- (\vec{\epsilon}_{i,l-1})(\vec{k}_{i,l})(\vec{\epsilon}_{j,m})(\vec{k}_{j,m-1}) + (\vec{\epsilon}_{i,l-1})(\vec{k}_{i,l})(\vec{\epsilon}_{j,m-1})(\vec{k}_{j,m})].$$

Supongamos que  $i \neq j$ ; entonces hacemos el cambio  $\vec{\epsilon}_{i,1} \rightarrow \vec{\epsilon}_{i,1-1}$ ,  $\vec{\epsilon}_{i,1-1} \rightarrow \vec{\epsilon}_{i,1}$  (sólomente para la  $i$ ), bajo el cual el exponente de (B.17) permanece invariante, pero  $I(G_2^{F1}, N, M)$  cambia el signo, que implica que la contribución de  $G_2^{F1}(i \neq j)$  a (B.17) es igual a menos ella misma, y, por tanto, igual a cero. Así pues, sólo  $i = j$  contribuye. Para  $G_2^{F2}$  tenemos que haciendo el cambio (B.18) el exponente de (B.17) se hace par en las  $\vec{\epsilon}_{i,1}$ , pero  $I(G_2^{F2}, N, M)$  es impar a no ser que  $i = j$ , en cuyo caso es cuadrático, de forma que, por integración simétrica, sólo el caso  $i = j$  contribuye a la integral (B.17). Concluimos pues, que, hasta orden  $\hbar^2$ , la interacción entre partículas distintas está mediada por el potencial de Coulomb y no por el campo EM.

Pasemos ya a efectuar las integrales de (B.17). Analicemos primero el término que va con  $G_1^D$ . Al efectuar el cambio (B.18) el exponente de (B.17) se hace par, pero  $G_1^D$  es impar, por lo que su integral será cero, que nos permite concluir que el término dipolar de (B.17) no contribuye.

Integremos ahora el sumando de (B.17) que va con  $G_2^{F1}$ , que es la primera corrección cuántica (recuérdese que va con  $\beta \hbar^2$ ). Haciendo el cambio (B.18), usando el  $a^{-1/2}$  de (B.20.a) con  $n = 1$  y teniendo en cuenta que en nuestro caso  $a = [m(M+1)a_{i,1}/2 \beta \hbar^2]$ , cada integral sobre  $\vec{\epsilon}_{i,1}$  da un factor

$$\left[ \frac{2\pi\beta\hbar^2}{m(M+1)} \right]^{3/2} \left( \frac{1}{a_{e,i}} \right)^{3/2},$$

de forma que, considerando los  $(m^{-1}2\pi\beta\hbar^2)^{-3/2}$  del elemento de volumen, el factor global resulta ser

$$\left[ \frac{m(M+1)}{2\pi\beta\hbar^2} \right]^{3N/2} \prod_{i=1}^N \prod_{l=1}^M \left( \frac{1}{a_{e,i}} \right)^{3/2},$$

que, usando (B.19), es igual a

$$\left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2}.$$

Todavía nos queda un factor  $a^{-1}$  de la ecuación (B.20.a) (recuérdese que  $n = 1$  y sólo hemos usado  $a^{-1/2}$ ). Para  $M = 1$  tenemos

$I(G_2^F, N, M=1) = 0$ . Para  $M=2$ ,

$$I(G_2^F, N, M=2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(\vec{\epsilon}\vec{\chi}_{e,i})^2(k\vec{\chi}_{e,i})^2 + (\vec{\epsilon}\vec{\chi}_{e,i})^2(k\vec{\chi}_{e,i})^2],$$

donde hemos usado que sólo  $i = j$  contribuye. Integrandlo obtenemos un factor

$$\frac{N}{2\pi} \left( \frac{\beta\hbar^2}{m} \right)^2 \vec{\epsilon}^2 k^2.$$



Para  $M = 3$ ,

$$\begin{aligned} \bar{Z}(G_2^{\bar{F}_1}, N, M=3) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N [(\vec{\epsilon} \vec{\chi}_{i,1})^2 (\vec{k} \vec{\chi}_{i,2})^2 + (\vec{\epsilon} \vec{\chi}_{i,2})^2 (\vec{k} \vec{\chi}_{i,1})^2 \\ & + (\vec{\epsilon} \vec{\chi}_{i,1})^2 (\vec{k} \vec{\chi}_{i,3})^2 + (\vec{\epsilon} \vec{\chi}_{i,3})^2 (\vec{k} \vec{\chi}_{i,1})^2] , \end{aligned}$$

que, tras integrar, da lugar a un factor

$$\frac{N}{3} \left( \frac{\beta \hbar^2}{m} \right)^2 \vec{\epsilon}^2 \vec{k}^2 .$$

En general, para un  $M$  arbitrario el factor que viene de los  $a^{-1}$  es

$$N \left( \frac{M-1}{M+1} \right)^3 \left( \frac{\beta \hbar^2}{m} \right)^2 \vec{\epsilon}^2 \vec{k}^2 . \quad (B.21)$$

Usando que  $\vec{\epsilon}^2(\vec{k}, \lambda) = 1$  y que  $(M-1)^3/(M+1)^3$  tiende a 1 para  $M \rightarrow \infty$  concluimos que

$$Z'_{N,u}(G_2^{\bar{F}_1}) = - \left( \frac{m}{2\pi\beta\hbar^2} \right)^{3N/2} 2N \frac{\beta\hbar^2}{m^2} \mathcal{C} , \quad (B.22)$$

con  $\mathcal{C}$  dada por (3.7).

Análogamente se evalúan las correcciones en (B.17) que van con  $\beta^2 \hbar^2$ , debidas a  $G_2^Q$  y  $G_2^{F2}$ . La contribución de  $G_2^Q$  va con la traza del tensor cuadrupolar  $Q^{ij,xy}$ , que es idénticamente cero (cfr. ecuación (3.2)), por lo que

$$Z'_{N,2}(G_2^2) = 0. \quad (B.23)$$

En cuanto a  $G_2^{F2}$  obtenemos

$$Z'_{N,2}(G_2^{F2}) = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2} 2N \frac{\beta^2 \hbar^2}{m} \mathcal{C}. \quad (B.24)$$

Para el término de (B.17) que va con  $\beta^3 M^2$ , el  $(G_1^D)^2$ , resulta

$$Z'_{N,2}((G_1^D)^2) = \left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2} \frac{3}{2} \frac{\beta^3 \hbar^2}{m} \left(\frac{q}{2\pi}\right)^4 \mathcal{D}, \quad (B.25)$$

con  $\mathcal{D}$  dada por (3.8). Para  $G_2^{F2}$  y  $(G_1^D)^2$  en lugar del factor  $(M-1)^3$  de (B.21) se obtienen respectivamente  $M^3 + \frac{61}{6} M^2 - \frac{113}{3} M + 27$  y  $M^3 - 5M^2 + 9M - 4$ .

Nótese que  $\vec{\xi}^2 \vec{k}^2$  es el único invariante bajo rotaciones no trivial de orden cuatro que se puede formar a partir de  $\vec{\xi}$  y  $\vec{k}$ , por lo que de antemano, y mirando las ecuaciones (B.10) y (B.11), se podría haber predicho que la contribución de  $G_1^{F1}$  iría con  $\vec{\xi}^2 \vec{k}^2$ , y por tanto, con  $\mathcal{C}$ . Lo mismo ocurre con  $G_1^{F1}$ , ecuaciones (B.12) y (B.13), y  $(G_1^D)^2$ , ecuación (B.4). En estos dos últimos casos los invariantes son  $\vec{\xi}^2$  y  $\mathcal{D}$ , respectivamente.

De (B.16)-(B.17) y (B.22)-(B.25) se sigue (3.6).

# APENDICE C

## JUSTIFICACION DE LAS ECUACIONES (3.10) - (3.13)

Vamos a probar en primer lugar la ecuación (3.10). Se trata de estudiar el límite  $\hbar \rightarrow 0$  de (2.14) bajo las hipótesis (3.2) - (3.5). De (2.15) y (2.16) se sigue que

$$\frac{(C+D) e^{i\omega\beta\hbar-1}}{\omega\hbar\omega\beta\hbar-1} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \frac{-4}{\omega^2\beta\hbar} \frac{c(\vec{k})}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M e^{i\vec{k}\vec{x}_l} \quad (C.1)$$

$$\times \{ [ \vec{E}(\vec{k}, \lambda) (\vec{\xi}_{i,l} - \vec{\xi}_{i,l-1}) ] \cdot \vec{\xi}_{i,l} - \vec{E}(\vec{k}, \lambda) \vec{\xi}_{i,l} [ (2l+1)\omega^2 c^2 - \omega^2 \beta \hbar \omega ] \} + o(\hbar^3).$$

Los términos escritos explícitamente son de órdenes  $\hbar$  y  $\hbar^2$ . Como queremos calcular la corrección de orden  $\hbar^2$  a  $\langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_{C1}$ , al desarrollar la exponencial de  $G(\vec{y})$  en (2.14) nos hemos de quedar con aquellos términos que sean de órdenes cero y uno en  $\hbar$ , es decir, con

$$\exp[G_K(\vec{\xi}) - \beta H_C] [1 + G_1^0] \quad (C.2)$$

(cfr. apéndice B). La integral que resulta del primer término de (C.2) y del primero de (C.1) no contribuye pues el resultado de la integración iría con  $\vec{E}(\vec{k}, \lambda) \vec{k}$ , que es cero. El primero de (C.2) con el segundo de (C.1) tampoco contribuye pues, bajo el cambio

(B.18),  $G_K$  se hace par en  $\vec{x}_{i,1}$  y el segundo de (C.1) impar, lo que implica que la correspondiente integral se anula. El segundo término de (C.2) cuando se combina con el primero de (C.1) da una parte cúbica en  $\vec{x}_{i,1}$ , por lo que al efectuar el cambio (B.18) va a quedar la integral extendida a todo el espacio de una función impar, que es cero. Por último, los términos segundos de (C.1) y (C.2) combinados dan orden  $\hbar^3$ , por lo que prescindimos de ellos. Así pues,

$$\langle \vec{A}(\vec{x}) \rangle_Q \sim O(\hbar^3) \quad , \quad \hbar \rightarrow 0 \quad ,$$

que no es otra cosa que (3.10).

Todo lo dicho anteriormente es trasladable a  $\vec{B}$ , ecuación (2.17), obteniéndose (3.11).

En cuanto al campo eléctrico, la ecuación (2.18) nos dice que la integral de camino que define  $\langle \vec{E}(\vec{x}) \rangle_Q$  es la misma que la de  $Z_{N,Q}$ . Procediendo de la misma forma que en el apéndice B y desarrollando  $1/Z_{N,Q}$  en serie de potencias de  $\hbar$  se llega a (3.12).

Para obtener (3.13) basta usar (2.19) con  $Z_{N,Q}$  dado por (3.6).

# APENDICE D

## OBTENCION DE (7.56)

La masa física del fermión a temperatura finita  $m_R(\beta)$  está dada por (7.55) en términos de los coeficientes  $x_{11,0}^B$  ( $x=a,b,c$ ) evaluados en la capa de masas  $p^2=m_R^2$ . Estos, a su vez, vienen dados por (7.15)-(7.17) en términos de las integrales  $I_B(\alpha)$ ,  $U_B(\alpha)$ ,  $I_F$ ,  $U_F$ ,  $C_B(\alpha)$  y  $C_F$ , cuyas expresiones son (7.21), (7.22), (7.24) y (7.25). Así pues, habrá que evaluar dichas integrales cuando  $p^2=m_R^2$ . Aun más, la masa  $\lambda$  del fotón que aparece en la densidad lagrangiana (5.40) se introdujo para evitar las divergencias infrarrojas; pero los resultados físicos deben ser independientes de  $\lambda$ , por lo que debemos tomar el límite  $\lambda \rightarrow 0$ . Es decir, queremos calcular (7.21), (7.22), (7.24) y (7.25) cuando  $p^2=m_R^2$  y  $\lambda \rightarrow 0$ .

Recordemos que según (7.21)

$$I_B(\alpha) \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = \int d^4k \frac{1}{-2pk + i\epsilon} \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k^2|} - 1} \Big|_{p^2=m_R^2}.$$

Ahora bien, el integrando es una función impar en  $k^0$ , por lo que

$$I_B(\alpha) \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = 0. \quad (D.1)$$

Pasemos a  $U_B(\alpha)$ . También de (7.21) se sigue que

$$U_B(\alpha) \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = \int d^4k \frac{k^1}{-2pk + i\varepsilon} \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|}-1} \Big|_{p^2=m_R^2}.$$

Eligiendo los ejes de las variables mudas de integración  $k^0$  y  $k^3$  paralelos respectivamente a  $u^\nu$  y  $p^\nu - \xi u^\nu$  podemos escribir

$$U_B(\alpha) \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{-2(\xi k_0 + p^1 k \cos\theta) + i\varepsilon} \frac{1}{e^{\beta|k_0|}-1} \frac{1}{2|k_0|} [\delta(k_0 - k) + \delta(k_0 + k)] =$$

$$= -\frac{\pi^3}{6p\beta^2} \ln\left(\frac{\xi+p}{\xi-p}\right). \quad (D.2)$$

De la misma forma, a partir de (7.22), (7.24) y (7.25) obtenemos que

$$\tilde{I}_F \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = \frac{\pi}{2p} \int_0^\infty dk \frac{k N_F(k)}{k(m_R)} L_+(k), \quad (D.3)$$

$$U_F \Big|_{p^2=m_R^2, \lambda=0} = \xi \tilde{I}_F \Big|_{p^2=m_R^2} - \frac{\pi}{2p} \int_0^\infty dk k N_F(k) L_-(k), \quad (D.4)$$

$$C_B(\alpha) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\pi^3}{3\beta^2}, \quad (D.5)$$

$$C_F = 2\pi \int_0^\infty dk \frac{k^2 N_F(k)}{k(m_R)}, \quad (D.6)$$

donde

$$N_F = \frac{1}{\exp[\beta(\sqrt{k^2 + m_R^2} - \mu)] + 1}, \quad k(m_R) = \sqrt{k^2 + m_R^2}, \quad (D.7)$$

$$L_+(k) = 2 \ln \left| \frac{k - p}{k + p} \right|, \quad L_-(k) = 2 \ln \left| \frac{\xi_R' - p' k(m_R)}{\xi_R' + p' k(m_R)} \right|. \quad (D.8)$$

Llevando (D.1)-(D.6) a (7.15)-(7.17) con  $p^2 = m_R^2$ , y lo que resulta a (7.55) obtenemos (7.56).

# APENDICE E

## OBTENCION DE (8.30)

En la sección 8.2 obtuvimos las ecuaciones (8.20) y (8.21), que nos dan las componentes  $\Pi_{11}^{(R)\nu\tau}(k)$  y  $\Pi_{12}^{(R)\nu\tau}(k)$  del tensor de polarización en términos de las integrales  $\Pi_{11}^L$ ,  $\Pi_{11}^T$ ,  $\Pi_{12}^L$  y  $\Pi_{12}^T$ , dadas por (8.18), (8.19), (8.22) y (8.23). En este apéndice vamos a elaborar un poco más estas últimas.

Empecemos por  $\Pi_{11}^L$ . De acuerdo con (8.18) tenemos

$$\Pi_{11}^L = -\frac{1}{2} \Pi^{(R)00} + \Pi_{11}^{L\beta} + \Pi_{11}^{L2\beta}, \quad (E.1)$$

donde la parte independiente de la temperatura  $\Pi^{(R)00}$  está dada por la segunda de (8.10) y  $\Pi_{11}^{L\beta}$  y  $\Pi_{11}^{L2\beta}$  por (8.14). En concreto, de (8.14), (8.4.b) y (5.44) se sigue que

$$\Pi_{11}^{L\beta} = -\frac{e^2}{3\pi^2} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) n_F(p) \left[ \frac{m^2 + \omega(pu)}{\omega^2 - 2\omega(pu) + i\epsilon} + \frac{m^2 - \omega^2 - \omega(pu)}{\omega^2 + 2\omega(pu) + i\epsilon} \right]$$

si  $K=0$ , y

$$\Pi_{11}^{L2\beta} = \frac{e^2 k^2}{2\pi^2 k^2} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) n_F(p) \left[ \frac{2pu(pu - \omega) + pk^2}{k^2 - 2pk + i\epsilon} + \frac{2pu(pu + \omega) - pk^2}{k^2 + 2pk + i\epsilon} \right]$$



si  $K \neq 0$ . Nótese que cuando  $K=0$ ,  $pk=(pu)\omega$  ( $\omega=ku$ ). Para efectuar estas dos integrales elegimos los ejes de las variables mudas  $p^0$  y  $p^3$  paralelos a  $u^v$  y  $k^v - \omega u^v$ , con lo que

$$\Pi_{11}^{L\beta} = -\frac{2e^2}{3\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \left[ \frac{2m^2 - \omega^2 - 2\omega p(m)}{\omega^2 + 2\omega p(m) + i\varepsilon} + \frac{2m^2 - \omega^2 + 2\omega p(m)}{\omega^2 - 2\omega p(m) + i\varepsilon} \right] \quad (E.2)$$

si  $K=0$ , y

$$\Pi_{11}^{L\beta} = -\frac{e^2 K^2}{2\pi^2 K^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \left[ 4 + \frac{4p^2(m) + K^2}{2pK} H_+(p) - \frac{2\omega p(m)}{pK} H_-(p) \right] \quad (E.3)$$

si  $K \neq 0$ , con  $N_F(p)$  dado por (D.7) y  $H_\pm(p)$  por

$$H_\pm(p) = \ln \left( \frac{k^2 - 2\omega p(m) - 2pK + i\varepsilon}{k^2 - 2\omega p(m) + 2pK + i\varepsilon} \right) \pm (\omega \leftrightarrow -\omega). \quad (E.4)$$

De manera análoga obtenemos

$$\Pi_{11}^{L2\beta} = -i \frac{e^2}{6\pi} \frac{(2m^2 + \omega^2) \sqrt{\omega^2 - 4m^2}}{\omega \{ \exp[\beta(\frac{\omega}{2} - \mu)] + 1 \}^2} \Theta(\omega^2 - 4m^2) \quad (E.5)$$

si  $K=0$ , y

$$\Pi_{11}^{L2\beta} = i \frac{e^2}{2\pi} \frac{K^2}{K^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \left\{ \frac{k^2 + 4p(m)[p(m) - \omega]}{\exp[p(|p(m) - \omega| - \mu)] + 1} \Theta(p, \omega, K) + (\omega \leftrightarrow -\omega) \right\} \quad (E.6)$$

si  $K \neq 0$ , donde

$$\Theta(p, \omega, k) = \Theta(k^2 - 2\omega p(m) - 2pK) + \Theta(k^2 - 2\omega p(m) - 2pK) . \quad (E.7)$$

Procediendo de la misma forma llegamos a

$$\Pi_{11}^T = -k^2 \Pi_{11}^{(R)0} + \Pi_{11}^{T\beta} + \Pi_{11}^{T2\beta} , \quad (E.8)$$

con  $\Pi^{(R)0}$  dado por la segunda de (8.10) y

$$\Pi_{11}^{T\beta} = \Pi_{11}^{L\beta} , \quad \Pi_{11}^{T2\beta} = \Pi_{11}^{L2\beta} \quad (E.9)$$

si  $K=0$ , y

$$\Pi_{11}^{T\beta} = -\frac{1}{2} \Pi_{11}^{L\beta} + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} \left[ 4 + \frac{2m^2 k^2}{2pK} H_2(p) \right] , \quad (E.10)$$

$$\Pi_{11}^{T2\beta} = -\frac{1}{2} \Pi_{11}^{L2\beta} - \frac{e^2}{2\pi} (2m^2 k^2) \int_0^\infty dp \frac{p^2 N_F(p)}{p(m)} . \quad (E.11)$$

$$+ \left\{ \frac{\Theta(p, \omega, k)}{\exp[\beta(|p(m)| - \omega - \mu)] + 1} + (\omega \leftrightarrow -\omega) \right\}$$

si  $K \neq 0$ . Los coeficientes  $\Pi_{12}^L$  y  $\Pi_{12}^T$ , dados por (8.22) y (8.23) se tratan de la misma manera.

Vamos a utilizar las expresiones encontradas para evaluar los límites (8.29) que proporcionan las masas eléctrica y magnética de

los fotones. Comencemos por (8.29.e). De (E.1), la segunda de (8.10), (E.3) y (E.6) se sigue que

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \Pi_{11}^L = \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{(m^2 + 2p^2)}{p^3 m} N_F(p). \quad (E.12)$$

A su vez, (E.8), la segunda de (8.10), (E.10) y (E.11) implican que

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \Pi_{11}^T = 0. \quad (E.13)$$

Finalmente, llevando (E.12) y (E.13) a (8.29.e) y usando (8.24) obtenemos (8.30.e).

De las ecuaciones (E.1), (E.8), la segunda de (8.10), (E.10) y (E.11) se sigue que

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^L(k^2=0) &= 0, \\ \Pi_{11}^T(k^2=0) &= \frac{2e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2(3m^2 + 2p^2)}{p^3 m} N_F(p), \end{aligned} \quad (E.14)$$

que llevadas a (8.29.1) y usando (8.24) proporcionan (8.30.1).

Por último, a partir de (E.1), (E.2), (E.5), (E.8) y (E.9) obtenemos

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \Pi_{11}^T = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \Pi_{11}^L = \frac{2e^2}{3\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2(3m^2 + 2p^2)}{p^3 m} N_F(p).$$

-223-

Introduciendo esta ecuación en (8.29.t) y teniendo en cuenta (8.24) llegamos a (8.30.t).

# APENDICE F

## OBTENCION DE (9.34)

En este apéndice vamos a obtener la ecuación (9.34), la cual es el resultado de sustituir en (9.33) el valor de las integrales  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_4$  de (9.32).

Para calcular  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_4$  es necesario conocer la forma de  $I^{\nu\tau}$ , ecuación (9.30), cuando  $p^\nu = p'^\nu$ . La delta de Dirac  $\delta((p-k)^2 - m^2)$  que aparece en (9.27) se puede escribir

$$\delta((p-k)^2 - m^2) = \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 - i\epsilon}.$$

Teniendo en cuenta esto y que [56]

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{VP} \frac{1}{x} \pm i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x),$$

donde  $\delta^{(n-1)}(x)$  es la derivada  $(n-1)$ -ésima de  $\delta(x)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} F(p, p', k) &= \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p-k)^2 - m^2 - i\epsilon} \\ &= \mathcal{VP} \frac{2}{(p-k)^2 - m^2} + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}((p-k)^2 - m^2) \\ &\quad + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}((p-k)^2 - m^2) \\ &= \mathcal{VP} \frac{2}{(p-k)^2 - m^2} + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}((p-k)^2 - m^2). \end{aligned} \tag{F.1}$$

Entonces de (9.30) es inmediato que

$$\bar{\psi}(p) = \frac{e^2}{2\pi^3} \int d^4k \, k^\nu k^\tau f(p, p, k) \Big|_{p^2=m^2}, \quad (F.2)$$

con  $f(p, p, k) \Big|_{p^2=m^2}$  dada por (F.1).

Pasemos a calcular  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_4$ . De (9.32), (F.2) y (F.1) se sigue que

$$I_1 = \frac{e^2}{2\pi^3} \int d^4k \, \frac{\delta^4(p-k)^2 - m^2}{e^{\beta(i\xi - k\omega - \mu) + 1}} \Big|_{p^2=m^2}.$$

Haciendo el cambio de variable  $p-k \rightarrow k$ , eligiendo los ejes de las variables mudas de integración  $k^0$  y  $k^3$  paralelos respectivamente a  $u^\nu$  y  $p^\nu - \xi u^\nu$ , e integrando por partes tenemos

$$I_1 = -\frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \, \frac{\partial}{\partial k_0} \left( \frac{1}{2k_0} \frac{1}{e^{\beta(|k_0| - \mu) + 1}} \right),$$

o, lo que es lo mismo,

$$I_1 = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \, \frac{k^2 N_F(k)}{k^2(m)} \left[ \frac{1}{k(m)} \cdot \beta e^{\beta(k(m) - \mu)} N_F(k) \right],$$

con  $k(m)$  y  $N_F(k)$  dadas por (D.7). Ahora bien, integrando por partes,

$$3 \int_0^\infty dk \frac{k^2 N_F(k)}{k^2(m)} e^{i[k(m)-\mu]} = \int_0^\infty dk \frac{m^2 N_F(k)}{k^2(m)},$$

de forma que

$$I_1 = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{N_F(k)}{k(m)}. \quad (F.3)$$

A su vez, de (9.32), (F.2) y (F.1) obtenemos

$$I_1 = \frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty dk (k_0)^2 \left\{ \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \frac{1}{(2pk - \omega)^2} + \frac{1}{2pk - \omega} \frac{\delta'((p \cdot k)^2 - m^2)}{e^{\beta(i\xi \cdot k_0 - \mu)} - 1} \right\} p^2 = m^2.$$

Haciendo en el segundo término del integrando el cambio  $p \cdot k \rightarrow k$ , eligiendo los ejes de la misma forma que en el caso anterior e integrando por partes en el segundo sumando llegamos a

$$I_1 = \frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \left\{ \frac{\delta(k_0^2 - k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \frac{k_0^2}{(2\xi k_0 - 2pk \cos\theta)^2} - \frac{\delta(k_0^2 - k^2 - m^2)}{2k_0} \frac{\partial}{\partial k_0} \frac{1}{2k} \frac{(\xi - k_0)^2}{2m^2 - 2\xi k_0 - 2pk \cos\theta} \frac{1}{e^{\beta(|k_0| - \mu)} - 1} \right\}. \quad (F.4)$$

Pará electrones no relativistas, es decir,  $p \ll m$ , tenemos

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 = & \frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty dk_0 \left\{ \frac{\delta(k^2 - k_0^2)}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} - \frac{1}{4m^2} - \right. \\ & \left. - \delta(k_0^2 - k^2 - m^2) \frac{i}{k_0} \frac{1}{2k_0} \frac{m - k_0}{2m} \frac{1}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} \right\} + O(p), \end{aligned}$$

que tras efectuar las integrales la podemos escribir

$$\bar{I}_2 = \frac{e^2}{12\beta^2 m^2} + \frac{1}{2} \bar{I}_1 + O(p). \quad (F.5)$$

Por último, de (9.32), (F.2) y (F.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} \bar{I}_3 = & \frac{e^2}{2\pi^3 p^2} \int d^4k (pk - \xi uk)^2 \left\{ \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} - \frac{1}{(2pk + i\varepsilon)^2} - \right. \\ & \left. + \frac{1}{(2pk + i\varepsilon)} \frac{\delta^2(p^2 - k^2 - m^2)}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} \right\} \frac{1}{p^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma que con  $I_2$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} \bar{I}_4 = & \frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty dk_0 \left\{ \frac{\delta(k^2 - k_0^2)}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} - \frac{k^2 \omega^2 \theta}{(2\xi k_0 - 2pk \omega \theta)^2} - \right. \\ & \left. - \delta(k_0^2 - k^2 - m^2) \frac{i}{k_0} \frac{1}{2k_0} \frac{(2\xi k_0 \omega \theta)^2}{2m^2 - 2\xi k_0 - 2pk \omega \theta} \frac{1}{e^{\beta(k_0 - \mu)}} \right\} + O(p), \end{aligned} \quad (F.6)$$



que para electrones no relativistas se simplifica a

$$\frac{1}{\epsilon^2} \chi = \frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\infty}^\infty dk_0 k^2 \omega^4 \cdot$$

$$\left\{ \frac{\delta(k_0^2 - k^2)}{\epsilon^2 \beta(k_0)} + \frac{1}{2\pi^2 k^2} - \delta(k_0^2 - k^2 - m^2) \frac{1}{k_0} - \frac{1}{4mk_0(m-k_0)} - \frac{1}{\epsilon^2 \beta(k_0 - \mu)} \right\} + \alpha(p) \cdot$$

Efectuando las integrales llegamos a

$$\frac{1}{\epsilon^2} \chi = \frac{e^2}{3\epsilon \beta^2 m^2} - \frac{1}{2} I_1 + C(p) \cdot \quad (F.7)$$

Llevando (F.3), (F.5) y (F.7) a (9.33) obtenemos

$$A = - \frac{e^2}{3\epsilon \beta^2 m^2} + C(p) \cdot \quad (F.8)$$

que es precisamente (9.34).

REFERENCIAS

- [1] W. Israel: *Physica A* 106, 204 (1981).
- [2] C. Bernard: *Phys. Rev. D* 9, 3312 (1974).
- [3] T. Matsubara: *Prog. Theor. Phys.* 14, 351 (1955).
- [4] L. Dolan y R. Jackiw: *Phys. Rev. D* 9, 3320 (1974).
- [5] P.D. Morley: *Phys. Rev. D* 17, 598 (1978).  
M.B. Kislinger y P.D. Morley: *Phys. Rev. D* 13, 2765 (1976).
- [6] D.J. Gross, R.D. Pisarski y L.G. Yaffe: *Rev. Mod. Phys.* 53, 43 (1981).
- [7] A.L. Fetter y J.D. Walecka: "Quantum Theory of Many Particle Systems", McGraw-Hill (Nueva York, 1971).
- [8] G. Peressutti y B.S. Skagerstam: *Phys. Lett. B* 110, 406 (1982).
- [9] J.F. Donoghue y B.R. Holstein: *Phys. Rev. D* 28, 340 (1983)  
J.F. Donoghue, B.R. Holstein y R.W. Robinett: *Phys. Rev. D* 30, 2561 (1984).
- [10] R. Tarrach: *Phys. Lett. B* 133, 259 (1983).
- [11] H.A. Weldon: *Phys. Rev. D* 26, 1394 (1982).
- [12] Y. Takahashi y H. Umezawa: *Coll. Phen.* 2, 55 (1975).
- [13] I. Ojima: *Ann. Phys.* 137, 1 (1981).
- [14] H. Umezawa, H. Matsumoto y M. Tachiki: "Thermo Field Dynamics and cardensed states", North-Holland, Amsterdam (1982).
- [15] A.J. Niemi y G.W. Semenoff: *Nucl. Phys. B* 230, 181 (1984).
- [16] H. Matsumoto, I. Ojima y H. Umezawa: *Ann. Phys.* 152, 348 (1984).

- [17] J.J. Sakurai: "Advanced Quantum Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967).
- [18] R.P. Feynman: "Statistical Mechanics", W.A. Benjamin, Reading, Mass. (1972).
- [19] R. Balescu: "Equilibrium and non-equilibrium Statistical Mechanics", John Wiley & Sons, Nueva York (1975).
- [20] R.P. Feynman y A.R. Hibbs: "Quantum Mechanics and path integrals", McGraw-Hill, Nueva York (1965).
- [21] R.P. Feynman: Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948).
- [22] B. Simon: "Functional integration and Quantum Physics", Academic Press, Nueva York (1979).
- [23] W. Thirring: "Quantum Mechanics of large systems", Springer Verlag, Nueva York (1983).
- [24] K. Huang: "Statistical Mechanics", John Wiley, Nueva York (1963).
- [25] L.D. Landau y E. Lifchitz: "Statistical Physics", 3a edición, tomo 1, Pergamon Press, Londres (1980).
- [26] L.S. Schulman: "Techniques and applications of path integration", John Wiley & Sons, Nueva York (1981).
- [27] E. Wigner: Phys. Rev. 40, 479 (1932).  
J. G. Kirwood: Phys. Rev. 44, 31 (1933).
- [28] M.B. Halpern y W. Siegel: Phys. Rev. D 16, 2486 (1977).
- [29] S.S. Schweber: "An introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Harper and Row, Nueva York (1964).
- [30] S. Ichimaru: "Basic principles of plasma physics", W.A. Benjamin, Reading, Mass. (1973).
- [31] E.H. Lieb y W. Thirring: Phys. Rev. Lett. 35, 687 (1978).

- [32] R. Blanco, L. Pesquera, E. Santos: Phys. Rev. D 27, 1254 (1983); 29, 2240 (1984).
- [33] F.W. Wiegel: Phys.Rep. 16, 57 (1975).
- [34] F. Ruiz Ruiz y R.F. Alvarez-Estrada: Ann. l'Inst. Henri Poincaré.
- [35] H. Matsumoto: Fortschr. Physik 25, 1 (1977).
- [36] Y. Fujimoto, R. Grigjanis y R. Kobes: Prog. Theor. Phys. 73, 434 (1985).
- [37] A.J. Niemi y G.W. Semenoff: Ann. Phys. 152, 105 (1984).
- [38] F. Fujimoto, R. Grigjanis y H. Nishino: Phys. Lett. B 141, 83 (1984).
- [39] H. Matsumoto, Y. Nakano y H. Umezawa: Phys. Rev. D 31, 1495 (1985).
- [40] A. Actor: Phys. Rev. D 27, 2548 (1983); Phys. Lett. B 157, 53 (1985).
- [41] M. Planck: Ann. Phys. (Leipzig) 76, 1 (1908).
- [42] H. Ott: Z. Phys. 175, 70 (1963).
- [43] N.G. van Kampen: Phys. Rev. 173, 295 (1968).
- [44] C.K. Yuen: Am. J. Physics 38, 246 (1970).
- [45] H. Arzelies: "Thermodynamique relativiste et quantique", Gauthier-Villars, Paris (1968).
- [46] D. ter Haar y H. Wergeland: Phys. Rep. 1, 31 (1971).
- [47] E. de Rafael: "Lectures an Quantum Electrodynamics", Universidad Autónoma de Barcelona (1977).
- [48] G. t'Hooft y M. Veltman: "Diagrammar", CERN Yellow Report 73-9 (1973).

- [49] C. Itzykson y J.B. Zuber: "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, Nueva York (1980).
- [50] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik: "Table of integrals, series and products", Academic Press, Nueva York (1965).  
H.W. Braden: Phys. Rev. D 25, 1028 (1982).  
G.G. Mactarlane: Phil. Mag. 40, 188 (1949).
- [51] Y. Fujimoto y J.H. Yee: Phys. Lett. B 114, 359 (1982).
- [52] G.W. Semenoff y H. Umezawa: Nucl. Phys. B 220 [FS8], 196 (1983).
- [53] J. Schwinger: Phys. Rev. 128, 2425 (1962).
- [54] H.M. Fried: "Functional methods and models in Quantum Field Theory", MIT Press, Mass. (1972).
- [55] W. Thirring: Ann. Phys. 3, 91 (1958).
- [56] I.M. Guelfand y G.E. Chilov: "Les distributions", Dunod, París (1962).

